Die Logik des Logos

Elias Wegert, TU Bergakademie Freiberg

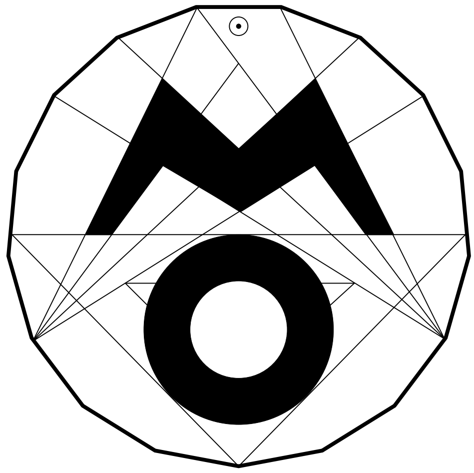
Die Satzung des Mathematik-Olympiade e.V. sieht vor, dass das Logo ein regelmäßiges Siebzehneck, einen Zirkel, ein Zeichendreieck und die Buchstaben "MO" enthalten soll. Die Auswahl dieser Elemente wurde unter anderem getroffen, um eine Besonderheit der Mathematik-Olympiaden hervorzuheben, die man vielleicht als "Sportlichkeit" beim Lösen der Aufgaben bezeichnen kann. Dazu gehört die freiwillige Beschränkung auf wenige, möglichst einfache Hilfsmittel.
Die klassischen Hilfsmittel für geometrische Konstruktionen sind Zirkel und Lineal. Ein Grundproblem der Geometrie besteht darin zu untersuchen, ob und gegebenenfalls wie bestimmte Konstruktionen unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal ausführbar sind.
Im Zeitalter der Computer mag diese Fragestellung vielleicht etwas antiquiert wirken – und sie ist für praktische Belange auch tatsächlich bedeutungslos. Jedoch verbergen sich hinter dem Problem reizvolle und tiefliegende mathematische Zusammenhänge. Manche Aufgaben wurden zeitweise von einem breiten Publikum diskutiert und die Unlösbarkeit der wahrscheinlich bekanntesten Konstruktionsaufgabe, der Quadratur des Kreises, ist bis heute ein Synonym für ein unlösbares Problem schlechthin.
Seit dem Altertum sind für eine Reihe von regelmäßigen Vielecken Konstruktionen mit Zirkel und Lineal bekannt. Nachdem lange Zeit keine weiteren Fortschritte erzielt wurden, nahm man an, dass die Menge der konstruierbaren regelmäßigen Vielecke mit den damals bekannten Konstruktionen erschöpft sei. Es war deshalb eine Sensation, als 1796 der damals 18-jährige Carl Friedrich Gauss völlig unerwartet entdeckte, dass auch das regelmäßige Siebzehneck zu den konstruierbaren Vielecken gehört.
Den Schlüssel zur seiner Konstruktion bildet eine Darstellung des Kosinus von 360°/17:

$$\frac{1}{16}\sqrt{17}-\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\frac{1}{8}\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}.$$

Entscheidend ist, dass diese Formel nur rationale Zahlen und Quadratwurzeln enthält. Wieviel Scharfsinn gehört dazu, einen solchen Zusammenhang zu finden! Obwohl Gauß im Laufe seines Lebens eine Vielzahl bedeutender mathematischer Erkenntnisse gewonnen hat, ziert nicht ohne Grund ein Siebzehneck seinen Grabstein.

Gauß' Entdeckung gab auch den Ausschlag für die Wahl der Bestandteile des Logos. Das Lineal wurde wegen der besseren Erkennbarkeit durch ein Zeichendreieck ersetzt. Dies ändert den Schwierigkeitsgrad der Aufgabe nicht. Man könnte übrigens das Lineal auch völlig weglassen und alle Konstruktionen allein mit dem Zirkel durchführen. Allerdings wird dann die Komplexität wesentlich größer.
Die Satzung legt zwar die Elemente des Logos fest, nicht aber ihre gegenseitige Lage. In einer etwas unruhigen Nacht vor der Eröffnung der Bundesrunde der 34. Olympiade

in Freiberg wurde mir klar, dass sich bei Beachtung einiger Prinzipien die gesamte Anordnung der einzelnen Elemente nahezu von selbst ergab.
Zunächst einmal sollte das Siebzehneck möglichst groß sein, damit es von einem Kreis deutlich unterschieden werden kann. Es mußte deshalb zweckmäßig den Rahmen des Ganzen bilden.



Die einzelnen Bestandteile sollten nicht willkürlich nebeneinander stehen, sondern aufeinander bezogen sein. Beispielsweise kann man geeignete Sehnen des Siebzehnecks auswählen, mit denen sich sowohl ein ganz passabler Zirkel als auch der Buchstabe „M" darstellen lässt.
Problematischer war die Position des Zeichendreiecks, denn es gibt keine Sehnen die rechtwinklig aufeinander stehen. Legt man aber aus Symmetriegründen den rechten Winkel gegenüber dem Scheitel des Zirkels in den "unteren" Punkt des Siebzehnecks, so gibt es genau ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck, dessen Eckpunkte sämtlich auf der Peripherie des Siebzehnecks liegen.

Der äußere Kreis des „O" ergibt sich dann als Inkreis dieses Dreiecks. Der innere Rand des Zeichendreiecks sollte so gewählt werden, dass alle Schenkel die gleiche Breite haben und sein Inkreis die innere Berandung des „O" bildet. Dabei ist natürlich zu beachten, dass „M" und „O" stilistisch möglichst ähnlich sind. Beide Bedingungen werden erfüllt, wenn man die oberen Eckpunkte des inneren Dreiecks als Schnittpunkte der Winkelhalbierenden des äußeren Dreiecks mit den Sehnen P_7P_{15} bzw. P_4P_{12} wählt.
Damit ist eine komplette Konstruktionsvorschrift für das Logo gegeben, die prinzipiell allein mit Zirkel und Lineal ausführbar ist. Das Logo selbst besitzt nur einen Freiheitsgrad, nämlich seine Größe.
Will man das Logo allerdings tatsächlich zeichnen, ist das Gaußsche Verfahren allerdings wenig geeignet. Einfacher geht es mit Hilfe eines Winkelmessers, aber das ist erstens 'unsportlich' und zweitens gibt es wahrscheinlich nur wenige Mathematiker, die einen Winkelmesser besitzen (viele haben nicht einmal einen Zirkel).
Recht effektiv kommt man mit einem Näherungsverfahren zum Ziel. Wie dieses Verfahren arbeitet, kann man der Aufgabe 361346B der Bundesrunde der 36. Mathematik-Olympiade entnehmen. Der Einfachheit halber wurde allerdings die Zahl siebzehn dabei durch die Zahl fünf ersetzt. Diese Aufgabe ist übrigens tatsächlich ein Nebenprodukt des Logo-Entwurfs.