57. Mathematik–Olympiade
3. Runde (Landesrunde)
Lösungen – 2. Tag

571234 Lösung *6 Punkte*

Erste Lösung: Erster Schritt: $n = m^2$.

Hier ist $2^{m^2} \geq m^{2m}$ für $m \geq 4$ zu zeigen bzw. die äquivalente Ungleichung

$$2^m \geq m^2 \,. \tag{1}$$

Dazu gehen wir induktiv vor. Für $m = 4$ tritt in (1) Gleichheit ein. Um nun aus der Gültigkeit der Ungleichung (1) für m auf diejenige für $m+1$ schließen zu können, benötigt man den Vergleich $(m+1)^2 \leq 2m^2$, denn damit folgt aus $m^2 \leq 2^m$ stets $(m+1)^2 \leq 2 \cdot 2^m = 2^{m+1}$, womit dann (1) für alle ganzzahligen $m \geq 4$ gezeigt ist.

In der Tat gilt für $m \geq 4$ die Abschätzung

$$(m+1)^2 = m^2 + 2m + 1 < 2m^2 - m^2 + 3m = 2m^2 - m(m-3) < 2m^2 \,,$$

sodass (1) bewiesen ist.

Zweiter Schritt: Für $m \geq 1$ und $n \geq m^2$ gilt stets $(n+1)^m \leq 2n^m$.

Aus der Ungleichung $(k+1)(k-1) = k^2 - 1 < k^2$ folgt für jedes $k > 1$

$$\frac{k+1}{k} < \frac{k}{k-1} \,.$$

Also gilt für $m \geq 1$ und $n \geq m^2$

$$\begin{aligned}\left(\frac{n+1}{n}\right)^m &= \underbrace{\frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \cdots \frac{n+1}{n}}_{m\text{-mal}} \\ &\leq \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n-2} \cdots \frac{n-m+2}{n-m+1} \\ &= \frac{n+1}{n-m+1} = 1 + \frac{m}{n-m+1} \leq 1 + \frac{m}{m^2-m+1} = 1 + \frac{m}{m+(m-1)^2} \leq 2 \,.\end{aligned}$$

Dritter Schritt: Beweis der Behauptung aus der Aufgabenstellung.

Wir gehen per Induktion nach n vor. Für $n = m^2$ wurde die Behauptung im ersten Schritt gezeigt. Ist sie für einen bestimmten Wert von n wahr, so folgt nun nach dem zweiten Schritt

$$(n+1)^m \leq 2n^m \leq 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} \,,$$

also die behauptete Ungleichung für $n+1$. Daraus ergibt sich die Gültigkeit von

$$n^m \leq 2^n$$

für alle ganzen Zahlen m und n mit $m \geq 4$ und $n \geq m^2$.

Zweite Lösung: *Lemma:* Für ganze Zahlen mit $k \geq n \geq 4$ gilt stets

$$\sqrt[k]{k} \leq \sqrt[n]{n}\,. \tag{2}$$

Beweis: Es genügt, $\sqrt[n+1]{n+1} \leq \sqrt[n]{n}$, also $(n+1)^n \leq n^{n+1}$, $((n+1)/n)^n \leq n$ oder

$$\frac{n+1}{n} \leq \sqrt[n]{n}$$

zu zeigen. Hierzu ergibt die Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel von $n+1$ Zahlen,

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1}}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{x_1 x_2 \ldots x_{n+1}}\,,$$

für $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = 1$ und $x_n = x_{n+1} = 1/2$

$$\frac{n}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{\frac{1}{4}}$$

und folglich $(n+1)/n \leq \sqrt[n+1]{4} < \sqrt[n]{4} \leq \sqrt[n]{n}$, was zu beweisen war.

Wir zeigen jetzt $2^n \geq n^m$ für $m \geq 4$ und $n \geq m^2$ in der äquivalenten Form

$$\sqrt[n]{n} \leq \sqrt[m]{2}\,.$$

Hierfür genügt es, wegen $n \geq m^2$, $m^2 \geq 16 > 4$ und (2),

$$\sqrt[m^2]{m^2} \leq \sqrt[m]{2}$$

für $m \geq 4$ zu zeigen. Dies ist aber äquivalent zu $\sqrt[m]{m^2} \leq 2$ oder

$$\sqrt[m]{m} \leq \sqrt{2} = \sqrt[4]{4}\,,$$

was wegen $m \geq 4$ ein Spezialfall von (2) ist.

Dritte Lösung: Es genügt, für reelle Zahlen n, m mit $n \geq m^2 \geq 16$ zu zeigen, dass

$$2^n \geq n^{\sqrt{n}} \tag{3}$$

gilt. In der Tat ist die Potenzfunktion ψ mit $\psi(x) := n^x$ monoton wachsend, da $n \geq 1$ gilt. Folglich haben wir wegen $\sqrt{n} \geq m$ auch $n^{\sqrt{n}} \geq n^m$.

Die Ungleichung (3) ist äquivalent zu $n \ln 2 \geq \sqrt{n} \ln n$ und $\sqrt{n} \ln 2 \geq \ln n$. Wir betrachten nun die Funktion φ mit

$$\varphi(n) = \sqrt{n} \ln 2 - \ln n\,,$$

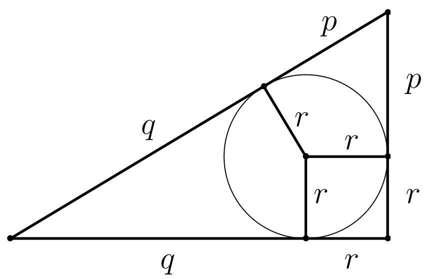
die für positive reelle Zahlen n definiert und differenzierbar ist. Für $n \geq 16$ ist φ wegen

$$\varphi'(n) = \frac{\ln 2}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{n} = \frac{1}{2n}(\sqrt{n} \ln 2 - 2) \geq \frac{1}{2n}(4 \ln 2 - 2) = \frac{1}{n} \ln \frac{4}{\mathrm{e}} > \frac{1}{n} \ln 1 = 0$$

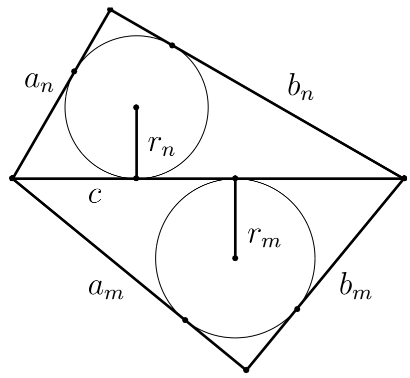
streng monoton wachsend. Hier wurde in der Abschätzung die bekannte Ungleichung $\mathrm{e} < 4$ für die Euler'sche Zahl e verwendet.

Da außerdem $\varphi(16) = 4 \ln 2 - \ln 16 = 0$ gilt, folgt für $n \geq 16$ die Ungleichung $\varphi(n) \geq 0$. Damit ist die Behauptung gezeigt.

Kennt man für ein Dreieck die Farbe, so liegt die Färbung für alle Nachbarn und damit für alle Dreiecke fest. Die Teilmengen der Dreiecke gleicher Farbe sind also wie in Abbildung A 571235 dargestellt durch die Aufgabenstellung eindeutig festgelegt. Zu jeder Farbe gehören genau vier der Dreiecke.



L 571235 a

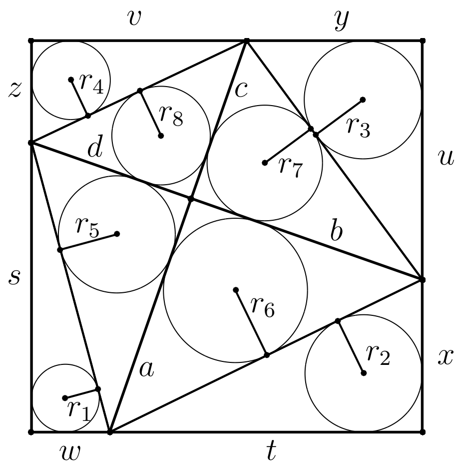


L 571235 b

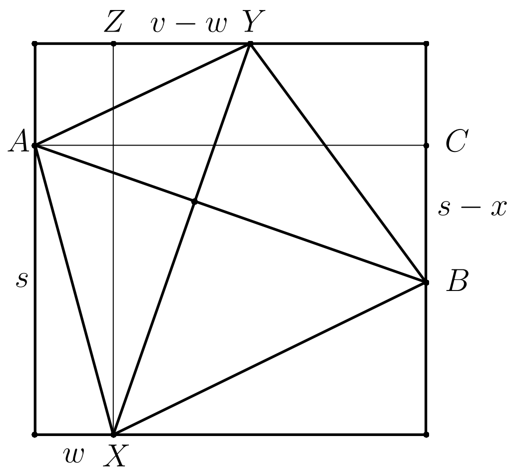
In jedem rechtwinkligen Dreieck mit Katheten der Längen a und b und der Hypotenuse der Länge c gilt für den Inkreisradius $r = (a + b - c)/2$, denn aus Abbildung L 571235 a liest man $c = p + q = (a - r) + (b - r)$ ab.

Haben zwei rechtwinklige Dreiecke mit den Kathetenlängen a_m und b_m sowie a_n und b_n die Hypotenuse gemeinsam (d. h. $c_n = c_m = c$, vgl. Abbildung L 571235 b), so folgt daraus für die Differenz der Radien

$$2(r_n - r_m) = a_n + b_n - a_m - b_m\,. \tag{1}$$



L 571235 c



L 571235 d

Im Weiteren werden die in Abbildung L 571235 c festgelegten Bezeichnungen für die Längen von Kanten und Radien verwendet. Die zu beweisende Behauptung lautet demnach

$$r_1 + r_3 + r_6 + r_8 = r_2 + r_4 + r_5 + r_7\,.$$

Dazu soll bewiesen werden, dass die Abweichung f von dieser Gleichheit, also die Differenz

$$f = (r_1 + r_3 + r_6 + r_8) - (r_2 + r_4 + r_5 + r_7)\,,$$

den Wert null annimmt. Wendet man (1) viermal an,

$$\begin{aligned}
2(r_1 - r_5) &= s + w - a - d\,, \\
2(r_6 - r_2) &= a + b - t - x\,, \\
2(r_3 - r_7) &= u + y - b - c\,, \\
2(r_8 - r_4) &= c + d - v - z\,,
\end{aligned}$$

und addiert diese vier Gleichungen, so fallen die Größen a, b, c und d heraus, und es ergibt sich

$$\begin{aligned}
2f &= s + w - t - x + u + y - v - z \\
&= (s - x) - (t - y) + (u - z) - (v - w)\,.
\end{aligned}$$

Um $f = 0$ zu beweisen, genügt es, die Gleichungen

$$v - w = s - x = t - y = u - z$$

zu überprüfen. Da diese entsprechend der Rotationssymmetrie des Quadrates zyklisch sind, reicht es dazu wiederum aus, nur den ersten Teil, also $v - w = s - x$, zu bestätigen.

Falls $s = x$ gilt, hat das einbeschriebene Viereck eine horizontale und mithin auch eine vertikale Diagonale, was $v = w$ impliziert.

Von den beiden verbleibenden Fällen, $s > x$ und $s < x$, genügt es aus Symmetriegründen, nur den ersteren zu behandeln. Dann ist auch $v > w$.

Die Ecken des Vierecks seien wie in Abbildung L 571235 d dargestellt mit A, X, B und Y bezeichnet. Die senkrechten Projektionen von A und X auf die jeweils gegenüberliegenden Seiten des Quadrates seien C beziehungsweise Z. Die beiden rechtwinkligen Dreiecke ABC und XYZ sind ähnlich, denn einander entsprechende Seiten stehen senkrecht aufeinander. Außerdem stimmen die Längen der jeweils längeren Katheten mit der Seitenlänge des Quadrates überein. Mithin sind die beiden Dreiecke sogar kongruent. Folglich stimmen auch die Längen der kürzeren Katheten überein, und es gilt in der Tat $v - w = s - x$. Damit ist der Beweis vollbracht.

571236 Lösung *7 Punkte*

Weil für alle reellen Zahlen u die Identität $u^3 - 8 = (u - 2)(u^2 + 2u + 4)$ gilt, ist das Gleichungssystem äquivalent zu

$$(y - 2)(y^2 + 2y + 4) = 6\,x(x - 2)\,, \tag{1}$$
$$(z - 2)(z^2 + 2z + 4) = 6\,y(y - 2)\,, \tag{2}$$
$$(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 6\,z(z - 2)\,. \tag{3}$$

Für $x = y = z = 2$ sind diese Gleichungen erfüllt; das Tripel $(2, 2, 2)$ ist eine Lösung. Im Weiteren wird gezeigt, dass dieses Lösungstripel das einzige ist.

Wegen $u^2 - 4u + 4 = (u - 2)^2 \geq 0$ gilt für alle reellen Zahlen u die Ungleichung

$$u^2 + 2u + 4 \geq 6\,u\,, \tag{4}$$

wobei Gleichheit nur für $u = 2$ eintritt. Außerdem ist $u^2 + 2u + 4 = (u + 1)^2 + 3 \geq 3 > 0$.

Es sei nun (x, y, z) ein Lösungstripel. Ist $x = 2$, so folgt aus der Gleichung (1) und $y^2+2y+4 \geq 3$, dass auch $y = 2$ ist. Aus (2) ergibt sich weiter, dass auch $z = 2$ sein muss. Analog schließt man, dass $x = y = z = 2$ gilt, sobald eine der Zahlen x, y oder z gleich 2 ist.

Ist x negativ, so folgt aus $x^2 + 2x + 4 > 0$ und aus (3), dass $0 < z < 2$ gelten muss. Aus (2) folgt dann weiter, dass auch $0 < y < 2$ gelten muss, und aus (1) folgt $0 < x < 2$. Damit kann x nicht negativ sein, ebensowenig y und z, wie man analog schließt.

Im Weiteren wird deshalb vorausgesetzt, dass alle drei Zahlen nichtnegativ und von 2 verschieden sind.

Durch Multiplikation der Gleichungen (1)–(3) folgt

$$6^3\, xyz\, (x-2)(y-2)(z-2) = (x-2)(y-2)(z-2)(x^2+2x+4)(y^2+2y+4)(z^2+2z+4)\,,$$

und Division durch die von null verschiedene Zahl $(x-2)(y-2)(z-2)$ ergibt

$$6^3\, xyz = (x^2+2x+4)(y^2+2y+4)(z^2+2z+4)\,. \tag{5}$$

Nach (4) ist die rechte Seite von (5) größer oder gleich 6^3xyz, wobei Gleichheit nur eintreten kann, wenn x, y und z gleich 2 sind. Da dies der soeben gemachten Voraussetzung widerspricht, ist die rechte Seite von (5) sogar größer als 6^3xyz; wir erhalten damit

$$6^3\, xyz = (x^2+2x+4)(y^2+2y+4)(z^2+2z+4) > 6^3xyz\,, \tag{6}$$

also einen Widerspruch.

Das Tripel $(2, 2, 2)$ ist somit die einzige Lösung des gegebenen Gleichungssystems.

Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

Aufgabe 571234 — *Insgesamt: 6 Punkte*

Zurückführung auf den Fall $n = m^2$ (mit Begründung) .... 2 Punkte
Äquivalente Vereinfachung des Falles $n = m^2$ (z. B. auf die Formel (1) oder auf $\varphi(n) \geq 0$) .... 1 Punkt
Beweis dieser Ungleichung .... 3 Punkte

Aufgabe 571235 — *Insgesamt: 7 Punkte*

Herleitung der Gleichung (1) .... 2 Punkte
Gleichung für $2f$ .... 2 Punkte
Nachweis von $f = 0$ .... 3 Punkte

Aufgabe 571236 — *Insgesamt: 7 Punkte*

Faktorzerlegung von $u^3 - 8$ und Schluss auf (1)–(3) .... 2 Punkte
Behandlung des Falls $x = y = z = 2$ .... 1 Punkt
Ansatz zum Einzigkeitsnachweis mittels quadratischer Ungleichungen .... 1 Punkt
Nachweis, dass $x = y = z = 2$ folgt, wenn eine der Variablen 2 ist, und Ausschluss negativer Werte .... 1 Punkt
Herleitung eines Widerspruchs im Fall $(x-2)(y-2)(z-2) \neq 0$ und Schluss auf Einzigkeit der Lösung $x = y = z = 2$ .... 2 Punkte