57. Mathematik–Olympiade
3. Runde (Landesrunde)
Lösungen – 1. Tag

571231 Lösung *6 Punkte*

Wir nehmen an, dass (x, y) ein Paar positiver ganzer Zahlen ist, das Lösung der gegebenen Gleichung ist. Dann gilt

$$2018 = 2x^2 - 2y^2 - 3xy = (x - 2y)(2x + y)\,,$$

wie man durch Ausmultiplizieren der rechten Seite nachprüft. Wir substituieren

$$a = x - 2y\,, \qquad b = 2x + y$$

und erhalten

$$5x = a + 2b\,, \qquad y = b - 2x \quad \text{und} \quad ab = 2018\,. \tag{1}$$

Da x und y positiv und ganzzahlig sind, folgt, dass a und b ganzzahlige Teiler von 2018 sind und $b \geq 3$ gelten muss.

Wir bestimmen alle Primteiler von 2018. Offensichtlich gilt

$$2018 = 2 \cdot 1009\,.$$

Aus den Darstellungen

$$\begin{aligned} 1009 &= 1001 + 8 = 7 \cdot 11 \cdot 13 + 2^3 \\ &= 986 + 23 = 2 \cdot 17 \cdot 29 + 23 \\ &= 589 + 420 = 19 \cdot 31 + 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \end{aligned}$$

folgt, dass 1009 nicht durch die Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 und 31 teilbar ist. Das sind alle Primzahlen kleiner als $32 = \sqrt{1024} > \sqrt{1009}$. Damit ist 1009 eine Primzahl, und die einzigen Teiler größer oder gleich 3 sind die Zahlen $b = 1009$ und $b = 2018$. Aus (1) mit $b = 2018$ folgt $a = 1$ und $5x = 4037$. Dann wäre x nicht ganz.

Also muss $b = 1009$ sein. Dann ist $a = 2$, $5x = 2020$, also $x = 404$ und $y = b - 2x = 201$. Weitere Lösungen sind nicht möglich.

Tatsächlich gilt

$$2 \cdot 404^2 - 2 \cdot 201^2 - 3 \cdot 404 \cdot 201 = 326432 - 80802 - 243612 = 2018\,.$$

Es gibt also genau eine Lösung, nämlich $x = 404$, $y = 201$.

Bemerkungen: 1. Zur Herleitung der Zerlegung von $2x^2 - 2y^2 - 3xy$ in ein Produkt kann man zunächst $x = ty$ setzen:

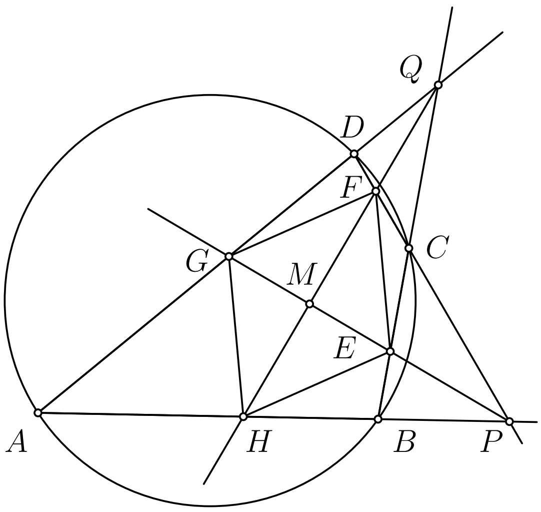
$$2x^2 - 2y^2 - 3xy = 2y^2\left(t^2 - 1 - \frac{3}{2}t\right)\,.$$

Weil das quadratische Polynom $p(t) = t^2 - 3t/2 - 1$ die Nullstellen $t_1 = 2$ und $t_2 = -1/2$ hat, gilt $p(t) = (t - t_1)(t - t_2) = (t - 2)(2t + 1)/2$. Damit folgt

$$2x^2 - 2y^2 - 3xy = y^2(t - 2)(2t + 1) = (x - 2y)(2x + y)\,.$$

2. Die Tatsache, dass 1009 eine Primzahl ist, kann auch als bekannter Sachverhalt zitiert werden.

571232 Lösung *7 Punkte*



L 571232

Ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit werde angenommen, dass der Punkt B zwischen A und P sowie der Punkt C zwischen B und Q liegt, siehe Abbildung L 571232.

Es sei M der Schnittpunkt der betrachteten Winkelhalbierenden und damit der Diagonalenschnittpunkt vom Viereck $EFGH$. Da das Viereck $ABCD$ ein Sehnenviereck ist, gilt $|\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle PBE|$. Es gilt $|\sphericalangle DPG| = |\sphericalangle EPB|$, weil die Gerade PG den Winkel $\sphericalangle DPA$ halbiert. Somit stimmen die Dreiecke GPD und BPE in allen Winkeln überein, und es gilt $|\sphericalangle BEP| = |\sphericalangle PGD|$. Weiterhin sind die Winkel $\sphericalangle BEP$ und $\sphericalangle QEG$ als Scheitelwinkel gleich groß. Folglich ist $|\sphericalangle QEG| = |\sphericalangle EGQ|$, das Dreieck GEQ ist also gleichschenklig. Als Winkelhalbierende des der Basis gegenüberliegenden Winkels ist $\overline{QM}$ in diesem gleichschenkligen Dreieck auch Mittelsenkrechte der Basis $\overline{EG}$. Die Strecke $\overline{FH}$ steht also in der Mitte der Strecke $\overline{GE}$ senkrecht auf dieser.

Analog wird gezeigt, dass die Strecke $\overline{GE}$ in der Mitte der Strecke $\overline{HF}$ senkrecht auf dieser steht.

Somit sind die Diagonalen im Viereck $EFGH$ senkrecht zueinander und halbieren sich gegenseitig. Das Viereck ist also eine Raute.

Erste Lösung: Wir untersuchen die Funktion

$$g(x) = x - a_3x^3 - a_5x^5 - \cdots - a_{57}x^{57}$$

auf dem Intervall $0 < x \leq 1$. Dort gilt $x^3 \geq x^5 \geq x^7 \geq \cdots$ und damit, wegen der Nichtnegativität der Koeffizienten, die Abschätzung

$$g(x) \geq x - x^3(a_3 + a_5 + \cdots + a_{57}) = x + x^3(g(1) - 1)\,.$$

Gilt $g(1) \leq -1/3$, so erfüllt $x = 1$ die Bedingung der Aufgabe.

Anderenfalls gilt $g(1) > -1/3$, und es folgt

$$g(x) > x + x^3\left(-\frac{1}{3} - 1\right) = x - \frac{4}{3}x^3\,.$$

Speziell gilt dann $g(1/2) > 1/3$, der Wert $x = 1/2$ erfüllt in diesem Fall alternativ die Bedingung.

Zweite Lösung: Die Funktion

$$g(x) = x - a_3x^3 - a_5x^5 - \cdots - a_{57}x^{57}$$

besitzt die erste Ableitung

$$g'(x) = 1 - 3a_3x^2 - 5a_5x^4 - \cdots - 57a_{57}x^{56}\,.$$

Wegen $g(-x) = -g(x)$, also auch $g(0) = 0$, reicht es aus, für die Untersuchung der Gültigkeit von $|g(x)| \geq 1/3$ das Intervall $0 < x \leq 1$ zu betrachten. Es gilt $g'(0) = 1$. Für $x > 0$ ist die Ableitung g' wegen der Nichnegativität der Koeffizienten a_i monoton nichtwachsend, und es gilt die Abschätzung

$$g'(x) \leq 1 - 3a_3x^2 - 3a_5x^4 - \cdots - 3a_{57}x^{56} = 1 + \frac{3}{x}\left(g(x) - x\right) = -2 + \frac{3}{x}g(x)\,,$$

also

$$g(x) \geq \frac{2}{3}x + \frac{x}{3}g'(x)\,. \tag{1}$$

Wir nehmen nun an, die Behauptung der Aufgabe wäre falsch. Dann muss für alle x mit $0 < x \leq 1$

$$-\frac{1}{3} < g(x) < \frac{1}{3} \tag{2}$$

gelten.

Fall 1: $g'(1) \geq 0$.

Dann ist im gesamten Intervall $0 \leq x \leq 1$ die Ableitung $g'(x) \geq 0$, und g ist monoton wachsend. Die Bedingung (2) ist genau dann erfüllt, wenn $g(1) < 1/3$ gilt. Dies führt unter Verwendung von (1) auf den Widerspruch

$$1 > 3 \cdot g(1) \geq 2 \cdot 1 + 1 \cdot g'(1) \geq 2 + 0 = 2\,.$$

Fall 2: $g'(1) < 0$.

Dann ist g' im Intervall $0 \leq x \leq 1$ streng monoton fallend und besitzt dort genau eine Nullstelle ξ. Dort nimmt g also sein globales Maximum an. Wegen $g(0) = 0$ gilt (2) folglich genau dann, wenn die beiden Bedingungen $g(1) > -1/3$ und $g(\xi) < 1/3$ erfüllt sind.

Aus der Bernoulli'schen Ungleichung folgt für $k \geq 1$ die Abschätzung $1+2k \leq (1+2)^k = 3^k \leq 3 \cdot 4^{k-1}$. Damit ergibt sich aus der ersten Bedingung

$$\begin{aligned} g'\left(\frac{1}{2}\right) &= 1 - \frac{3}{4}a_3 - \frac{5}{16}a_5 - \cdots - \frac{57}{4^{28}}a_{57} \\ &\geq 1 - \frac{3}{4}a_3 - \frac{3}{4}a_5 - \cdots - \frac{3}{4}a_{57} = 1 + \frac{3}{4}(g(1) - 1) \\ &> 1 + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3} - 1\right) = 0\,, \end{aligned}$$

woraus sofort $\xi > 1/2$ folgt. Dies liefert wegen (1)

$$g(\xi) \geq \frac{2}{3}\xi + \frac{\xi}{3}g'(\xi) = \frac{2}{3}\xi > \frac{1}{3}\,,$$

also einen Widerspruch zur zweiten Bedingung.

Bemerkung: Das Ergebnis ist in folgendem Sinne optimal: Für alle reellen Zahlen x mit $|x| \leq 1$ gilt

$$\left| x - \frac{4}{3}x^3 \right| \leq \frac{1}{3}\,. \tag{3}$$

Demnach ist es im Spezialfall $a_3 = 4/3$, $a_5 = a_7 = \cdots = a_{57} = 0$ nicht möglich, in der Aufgabe die Zahl $1/3$ durch eine größere zu ersetzen.

Zum Beweis von (3) wähle man einen Winkel φ mit $x = \cos\varphi$. Die bekannte Formel

$$\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$$

führt nun unmittelbar auf

$$\left| x - \frac{4}{3}x^3 \right| = \frac{|\cos(3\varphi)|}{3} \leq \frac{1}{3}\,.$$

Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

Aufgabe 571231	*Insgesamt: 6 Punkte*
Faktorisierung der linken Seite der gegebenen Gleichung	1 Punkt
Primfaktorzerlegung von 2018	1 Punkt
Einschränkung von b auf die Fälle $b = 1009$ und $b = 2018$	1 Punkt
Bestimmung der möglichen Lösungen in diesen Fällen	2 Punkte
Nachweis der Korrektheit der gefundenen Paare (Probe)	1 Punkt

Aufgabe 571232	*Insgesamt: 7 Punkte*
Wahl einer geeigneten Lage ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit oder ggf. Lagediskussion	1 Punkt
Feststellung von Winkelgleichheiten bis hin zur Ähnlichkeit der Dreiecke GPD und BPE	2 Punkte
Nachweis der Gleichschenkligkeit von $\triangle GEQ$	1 Punkt
Ausnutzung der Symmetrieeigenschaft des gleichschenkligen Dreiecks und Schluss auf Mittelsenkrechteneigenschaft von $\overline{FH}$	1 Punkt
Analoger Schluss für $\overline{GE}$	1 Punkt
Schluss auf Behauptung	1 Punkt

Aufgabe 571233	*Insgesamt: 7 Punkte*
Abschätzung des Ausdrucks für $x = 1$ (oder auch $x = -1$)	2 Punkte
Abschätzung des Ausdrucks für $x = 1/2$ (oder auch $x = -1/2$)	2 Punkte
Nachweis, dass nicht beide Werte die Bedingung nicht erfüllen können	3 Punkte
oder	
Diskussion eines Maximums am Rand	2 Punkte
Diskussion eines Maximums mit $\|x\| < 1$	2 Punkte
Nachweis, dass einer der Werte die Bedingung erfüllt	3 Punkte