Olympiadeklasse **10**

57. Mathematik–Olympiade
3. Runde (Landesrunde)
Lösungen – 2. Tag

571034 Lösung *6 Punkte*

Es sei a die Stundenleistung des Mähdreschers A. Die Zahl a gibt dabei an, welchen Anteil des betrachteten Feldes A innerhalb einer Stunde bearbeiten kann. Analog seien die Stundenleistungen der anderen beiden Mähdrescher mit b und c bezeichnet.

Die gegebenen Informationen führen dann zu folgendem linearen Gleichungssystem:

$$9\,a + 2\,b = 1\,, \tag{1}$$

$$4\,a + 3\,c = \frac{2}{3}\,, \tag{2}$$

$$2\,b + 3\,c = \frac{7}{12}\,. \tag{3}$$

Umstellen von (1) nach b und von (2) nach c liefert jeweils

$$2\,b = 1 - 9\,a \quad \text{und} \quad 3\,c = \frac{2}{3} - 4\,a\,. \tag{4}$$

Eingesetzt in (3) ergibt sich daraus nacheinander

$$\begin{aligned} \frac{7}{12} &= 2\,b + 3\,c = (1 - 9\,a) + \left(\frac{2}{3} - 4\,a\right) = \frac{5}{3} - 13\,a\,, \\ 13\,a &= \frac{5}{3} - \frac{7}{12} = \frac{13}{12}\,, \\ a &= \frac{1}{12}\,. \end{aligned}$$

Einsetzen in (4) ergibt

$$2\,b = 1 - 9\,a = 1 - \frac{9}{12} = \frac{1}{4} \quad \text{und damit} \quad b = \frac{1}{8}$$

sowie

$$3\,c = \frac{2}{3} - 4\,a = \frac{2}{3} - \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \quad \text{und damit} \quad c = \frac{1}{9}\,.$$

Aus dem Ausgangssystem folgt also

$$a = \frac{1}{12},\ b = \frac{1}{8},\ c = \frac{1}{9}\,.$$

Somit gilt: Mähdrescher A benötigt 12 Stunden, um das Feld allein abzuernten, Mähdrescher B benötigt dafür 8 Stunden und Mähdrescher C benötigt dafür 9 Stunden.

Anmerkung: Die Existenz einer Lösung darf als durch die Aufgabenstellung vorausgesetzt gelten.

571035 Lösung *7 Punkte*

Teil a) Eine der betrachteten Städte bezeichnen wir mit A. Nach dem Schubfachprinzip gibt es mindestens drei Städte, die von der Stadt A aus mit dem gleichen Verkehrsmittel erreichbar sind; drei solche Städte bezeichnen wir mit B, C und D. Verbindet dieses Verkehrsmittel auch zwei dieser drei Städte untereinander, dann gibt es eine Rundreise durch A und diese zwei Städte. Anderenfalls gibt es eine Rundreise mit dem anderen Verkehrsmittel durch B, C und D.

Teil b) Wir stellen uns die Städte in einem Fünfeck angeordnet vor. Auf dem Umfang des Fünfecks liegt eine Bahnstrecke, jede Stadt ist durch eine Zugverbindung mit ihren beiden Nachbarstädten verbunden. Auf den Diagonalen des Fünfecks liegen Straßen, zwischen den Enden jeder Diagonalen besteht eine Busverbindung. Dann gibt es keine Rundreisen durch drei Städte mit nur einem Verkehrsmittel.

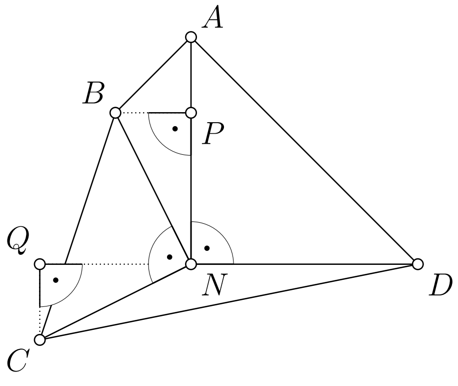
Teil c) Gemäß a) können wir annehmen, dass es eine Zug-Rundreise durch A, B und C gibt. Wir nehmen außerdem an, dass es keine weitere Rundreise der gewünschten Art gibt, und wollen diese Annahme zum Widerspruch führen.

Ist nun X eine der übrigen drei Städte D, E und F, dann gibt es von X zu mindestens zwei der Städte A, B, C eine Busverbindung, denn anderenfalls gäbe es zwei von ihnen, welche mit X eine Zug-Rundreise zulassen.

Gibt es nun keine Zug-Rundreise zwischen D, E und F, so gibt es zwischen D und E oder zwischen E und F oder zwischen F und D eine Busverbindung. Wir nehmen an, dass zwischen D und E eine Busverbindung besteht (die anderen beiden Fälle behandelt man analog). Wie oben gesehen, gibt es sowohl von D als auch von E zu mindestens zwei der Städte A, B, C eine Busverbindung; folglich gibt es zu einer dieser drei Städte sowohl von D als auch von E eine Busverbindung. Durch diese Stadt und durch D und E lässt sich somit eine Busrundreise durchführen, womit wir fertig sind.

571036 Lösung *7 Punkte*

Teil a)



Zunächst stellen wir fest, dass wegen

$$|\sphericalangle DNA| = |\sphericalangle DNB| - |\sphericalangle ANB| = 120° - 30° = 90° \quad \text{und}$$
$$|\sphericalangle BNC| = |\sphericalangle ANC| - |\sphericalangle ANB| = 120° - 30° = 90°$$

die Dreiecke NDA und NBC gleichschenklig-rechtwinklig sind mit Schenkellänge 8 bzw. 6. Ihre Flächeninhalte berechnen sich somit zu

$$\mathrm{A}_{NDA} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 = 32 \quad \text{und} \quad \mathrm{A}_{NBC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18\,.$$

Nun sei P der Fußpunkt des Lotes von B auf die Gerade AN. Dann ist $|BP|$ die Länge der Höhe von B auf die Grundseite $\overline{AN}$ des Dreiecks ABN. Weil der Winkel $\sphericalangle ANB$ die Größe 30° hat, ist das Dreieck BNP ein „halbes" gleichseitiges Dreieck und es gilt $|BP| = \frac{1}{2}|BN| = 3$. Für den Flächeninhalt des Dreiecks ABN ergibt sich damit $\mathrm{A}_{ABN} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 = 12$.

Sei nun Q der Fußpunkt des Lotes von C auf die Gerade DN. Dann ist $|CQ|$ die Länge der Höhe von C auf die Grundseite $\overline{DN}$ des Dreiecks CDN. Die Größe des Winkels $\sphericalangle CND$ berechnet sich zu

$$|\sphericalangle CND| = 360° - |\sphericalangle DNB| - |\sphericalangle BNC| = 360° - 120° - 90° = 150° .$$

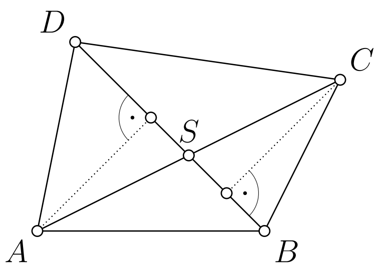
Daher hat das Dreieck CDN einen stumpfen Winkel bei N, der Punkt Q liegt auf der Verlängerung von $\overline{ND}$ über N hinaus, und es gilt $|\sphericalangle QNC| = 180° - |\sphericalangle CND| = 30°$. Somit ist das Dreieck CNQ ebenfalls ein „halbes" gleichseitiges Dreieck und es folgt $|CQ| = \frac{1}{2}|CN| = 3$. Daher gilt $\mathrm{A}_{CDN} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 = 12$.

Der gesuchte Flächeninhalt ergibt sich dann als Summe der betrachteten Flächeninhalte:

$$\mathrm{A}_{ABCD} = \mathrm{A}_{ABN} + \mathrm{A}_{NBC} + \mathrm{A}_{CDN} + \mathrm{A}_{NDA} = 12 + 18 + 12 + 32 = 74 .$$

Teil b) In einem Dreieck, für das eine der Seiten die Länge 6, eine der Seiten die Länge 8 und der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel die Größe 120° hat, ist die Länge der dritten Seite nach dem Kongruenzsatz (sws) eindeutig bestimmt; diese Länge bezeichnen wir mit c. Für alle konvexen Vierecke, die (1) erfüllen, gilt also $|BD| = |AC| = c$.

Hilfssatz: Der Flächeninhalt eines konvexen Vierecks ist höchstens so groß wie das halbe Produkt der Längen seiner Diagonalen, wobei Gleichheit genau dann eintritt, wenn die Diagonalen senkrecht aufeinanderstehen.



Es sei hierzu S der Diagonalenschnittpunkt; dann ist die von C ausgehende Höhe im Dreieck CDB höchstens so lang wie die Strecke $\overline{CS}$, und die von A ausgehende Höhe im Dreieck ABD ist höchstens so lang wie die Strecke $\overline{AS}$. Der Flächeninhalt des Dreiecks CDB ist demnach höchstens gleich $\frac{1}{2}|CS| \cdot |BD|$, der Flächeninhalt des Dreiecks ABD ist höchstens gleich $\frac{1}{2}|AS| \cdot |BD|$. Somit gilt

$$\mathrm{A}_{ABCD} = \mathrm{A}_{CDB} + \mathrm{A}_{ABD} \leq \frac{1}{2}(|CS| + |AS|) \cdot |BD| = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BD| .$$

In allen genannten Ungleichungen gilt genau dann Gleichheit, wenn die beiden Diagonalen aufeinander senkrecht stehen. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Da die Längen der Diagonalen der konvexen Vierecke $ABCD$, die (1) erfüllen, stets gleich c sind, wird der Flächeninhalt genau dann maximal, wenn die beiden Diagonalen senkrecht aufeinanderstehen.

Im Fall $|\sphericalangle ANB| = 30°$, der in Teil a) betrachtet wurde, überführt eine Drehung an N um den Winkel 90° den Punkt D in den Punkt A und den Punkt B in den Punkt C; somit stehen hier die Diagonalen des Vierecks $ABCD$ senkrecht aufeinander.

$|\sphericalangle ANB| = 30°$ ist also eine hinreichende Bedigung dafür, dass der Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$ unter allen konvexen Vierecken, die (1) erfüllen, maximal wird.

Anmerkung: In der Lösung wird die genaue Länge von c nicht benötigt. Mit Hilfe von a) kann diese elementar bestimmt werden – aus dem Hilfssatz folgt $\frac{1}{2}\,c^2 = 74$ und damit $c = 2\sqrt{37}$. Dasselbe Ergebnis erhält man über den Kosinussatz aus

$$c^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos(120°) = 6^2 + 8^2 + 6 \cdot 8 = 148\,.$$

Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

Aufgabe 571034 *Insgesamt: 6 Punkte*

Erfassen der Zusammenhänge in Formeln .... 2 Punkte
Auflösen der Gleichungen und Herleitung des Ergebnisses .... 4 Punkte

Aufgabe 571035 *Insgesamt: 7 Punkte*

Teil a) .... 2 Punkte
Teil b) .... 2 Punkte
Teil c) .... 3 Punkte

Aufgabe 571036 *Insgesamt: 7 Punkte*

Teil a) .... 3 Punkte
    Flächeninhalte der rechtwinkligen Dreiecke........ 1 Punkt
    Weitere Ausführungen zur vollständigen Lösung .... 2 Punkte
Teil b) .... 4 Punkte
    Zielführender Lösungsansatz .... 2 Punkte
    Ausführung des Ansatzes .... 2 Punkte