Olympiadeklasse **10**

57. Mathematik–Olympiade
3. Runde (Landesrunde)
Lösungen – 1. Tag

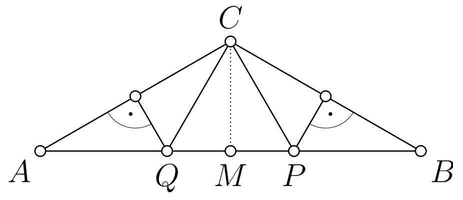
571031 Lösung *6 Punkte*

Teil a) Da es für jeden Buchstaben genau zwei Möglichkeiten gibt und diese Möglichkeiten unabhängig voneinander gewählt werden können, gibt es insgesamt $2^{11} = 2048$ solche Wörter.

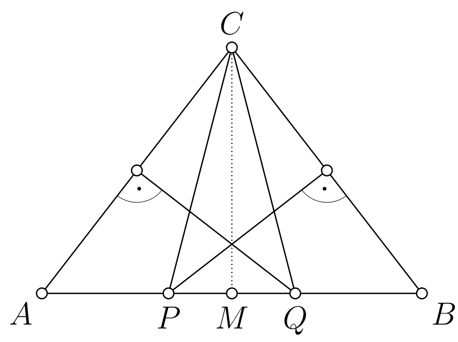
Teil b) Wenn in einem solchen Wort die ersten acht Buchstaben gleich sein sollen, dann gibt es für diese Buchstaben genau 2 Möglichkeiten und für jeden der letzten drei Buchstaben auch 2 Möglichkeiten. Es gibt also 2^4 Wörter, die mit acht gleichen Buchstaben beginnen. Analog gibt es genau 2^4 Wörter, die mit acht gleichen Buchstaben enden. Wörter, die sowohl mit acht gleichen Buchstaben beginnen als auch mit acht gleichen Buchstaben enden, sind nur diejenigen, die aus elf gleichen Buchstaben bestehen, also genau 2. Damit ist die Anzahl der gesuchten Wörter (nach dem Prinzip von Inklusion und Exklusion) gleich

$$2^{11} - 2^4 - 2^4 + 2 = 2018.$$

571032 Lösung *7 Punkte*



L 571032 a



L 571032 b

Vorüberlegung: Wir beginnen mit einem beliebigen gleichschenkligen Dreieck ABC mit der Basis $\overline{AB}$ der Länge $|AB| = \sqrt{57}$ und Schenkellänge $\sqrt{n}$. Derartige Dreiecke existieren wegen der Dreiecksungleichung für gleichschenklige Dreiecke genau für

$$|AC| + |BC| = 2\,|AC| = 2\sqrt{n} > |AB| = \sqrt{57}\,,$$

also für alle natürlichen Zahlen n mit $n \geq 15$.

Erste Lösung: Da der Winkel $\sphericalangle CBA$ spitz ist, schneidet die Mittelsenkrechte zur Strecke $\overline{BC}$ den Strahl $\overrightarrow{BA}$ in einem Punkt P. Analog schneidet die Mittelsenkrechte zur Strecke $\overline{AC}$ den Strahl $\overrightarrow{AB}$ in einem Punkt Q.

Die Dreiecke PBC und CAB sind ähnlich, da beide gleichschenklig sind mit dem gemeinsamen Basiswinkel $\sphericalangle CBA$. Folglich gilt $|PB| : |BC| = |BC| : |AB|$ und daher

$$|AB| \cdot |PB| = |BC|^2 = n\,. \tag{1}$$

Die Punkte P und Q liegen symmetrisch bezüglich des Mittelpunktes M der Strecke $\overline{AB}$. Folglich zerlegen P und Q die Basis $\overline{AB}$ genau dann in drei gleich lange Teilstrecken, wenn $|PB| = \frac{1}{3}\,|AB|$ (Abbildung L 571032 a) oder $|PB| = \frac{2}{3}\,|AB|$ (Abbildung L 571032 b) gilt. Aus (1) und $|AB| = \sqrt{57}$ folgt, dass der erste Fall äquivalent ist zu $n = \frac{1}{3} \cdot 57 = 19$ und der zweite Fall zu $n = \frac{2}{3} \cdot 57 = 38$.

Da für beide Lösungskandidaten $n \geq 15$ gilt, existieren nach der Vorüberlegung in beiden Fällen gleichschenklige Dreiecke mit Schenkellänge $\sqrt{n}$ und Basislänge $\sqrt{57}$.

Ein gleichschenkliges Dreieck mit den geforderten Eigenschaften existiert also genau für $n = 19$ und für $n = 38$.

Zweite Lösung: (1) lässt sich auch mit Hilfe des Satzes des Pythagoras herleiten. Mit den Bezeichnungen aus der ersten Lösung ist $\overline{CM}$ die Höhe zur Basis im gleichschenkligen Dreieck ABC.

Der Satz des Pythagoras, angewendet auf die rechtwinkligen Dreiecke MPC und MBC, liefert

$$|MP|^2 + |MC|^2 = |PC|^2 \quad \text{und} \quad |MB|^2 + |MC|^2 = |BC|^2 \ .$$

Subtraktion der so erhaltenen Gleichungen ergibt

$$|MP|^2 - |MB|^2 = |PC|^2 - |BC|^2 \ . \tag{2}$$

Weil P und M auf derselben Seite von B liegen, folgt $|MP| = |MB| - |PB|$ (wenn P zwischen M und B liegt wie in Abbildung L 571032 a) oder $|MP| = |PB| - |MB|$ (wenn P zwischen M und A liegt wie in Abbildung L 571032 b), in jedem Fall also

$$|MP|^2 = (|MB| - |PB|)^2 \ . \tag{3}$$

Da P auf der Mittelsenkrechten zu $\overline{BC}$ liegt, gilt $|PC| = |PB|$. Setzt man dies und (3) in (2) ein, erhält man

$$(|MB| - |PB|)^2 - |MB|^2 = |PB|^2 - |BC|^2 \ ,$$

woraus sich durch Vereinfachung $2 \cdot |MB| \cdot |PB| = |BC|^2$ und damit

$$|AB| \cdot |PB| = |BC|^2 = n$$

ergibt. Weiter argumentiert man wie in der ersten Lösung.

571033 Lösung *7 Punkte*

Teil a) Wir lösen die schriftliche Additionsaufgabe $571033 + g = u$. Da eine Steppenzebrazahl genau dann gegeben ist, wenn die Einerziffer Null ist und dann nach vorne gesehen jede zweite Ziffer Null ist, und eine Bergzebrazahl genau dann gegeben ist, wenn die Zehnerziffer Null und wieder nach vorne gesehen jede zweite Ziffer Null ist, ergibt sich:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & & 5 & 7 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ + & \dots & * & 0 & * & 0 & * & 0 & * & 0 & * & 0 \\ \hline & \dots & 0 & * & 0 & * & 0 & * & 0 & * & 0 & * \end{array}$$

Von rechts nach links lassen sich alle Sterne eindeutig durch Ziffern ersetzen, man erhält

$$\begin{array}{cccccccc} & & 5 & 7 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ + & & 5 & 0 & 9 & 0 & 7 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & 8 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}$$

Man kann also $u = 1080103$ und $g = 509070$ wählen.

Anmerkung: Ähnlich kann man eine Darstellung $571033 + u' = g'$ finden: Aus dem Ansatz

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & & 5 & 7 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ + & \dots & * & 0 & * & 0 & * & 0 & * & 0 & * \\ \hline & \dots & 0 & * & 0 & * & 0 & * & 0 & * & 0 \end{array}$$

ergibt sich

$$\begin{array}{ccccccc} & 5 & 7 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ + & & 3 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ \hline & 6 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \end{array}$$

Man kann also $u' = 30007$ und $g' = 601040$ wählen.

Teil b) $z = 0$ hat die eindeutige Darstellung $0 = u - g$ mit $u = g = 0$, da null die einzige Zahl ist, die zugleich Berg- und Steppenzebrazahl ist.

Sei zunächst $z > 0$. Wie in Teil a) wird die schriftliche Additionsaufgabe $z + g = u$ gelöst, indem man spaltenweise von rechts nach links alle Sterne durch Ziffern ersetzt.

Angenommen, der Stern steht in der untersten Zeile und in den Zeilen darüber die Ziffer a und 0. Außerdem ist aus der bisherigen Rechnung ein Übertrag ε zu berücksichtigen, der 0 oder 1 betragen kann. In diesem Fall geht man wie bei der schriftlichen Addition vor:

$$\begin{array}{cccc} & \dots & a & \dots \\ + & \dots & 0_\varepsilon & \dots \\ \hline & \dots & * & \dots \end{array}$$

Gilt $a + \varepsilon < 10$, so ist der Stern durch $a + \varepsilon$ zu ersetzen, und es entsteht 0 als neuer Übertrag. Andernfalls gilt $a + \varepsilon = 10$, der Stern muss durch die Ziffer 0 ersetzt werden, und es entsteht 1 als neuer Übertrag.

Angenommen, der Stern steht in der mittleren Zeile, darüber steht die Ziffer a, darunter die Null, und ein Übertrag $\varepsilon \in \{0, 1\}$ ist zu berücksichtigen.

$$
\begin{array}{cccc}
 & \ldots & a & \ldots \\
+ & \ldots & *_\varepsilon & \ldots \\
\hline
 & \ldots & 0 & \ldots
\end{array}
$$

Ist $a = \varepsilon = 0$, so muss der Stern durch die Ziffer 0 ersetzt werden, und es entsteht 0 als neuer Übertrag. Andernfalls ist wegen $a + \varepsilon \leq 10$ der Stern durch die Ziffer $10 - a - \varepsilon$ zu ersetzen, und es entsteht 1 als neuer Übertrag.

Es ist nur noch zu klären, dass dieser Vorgang abbricht, dass es also eine Spalte gibt, ab der weiter links alle Sterne durch Nullen ersetzt werden. Dazu betrachen wir den ersten Stern in der unteren Zeile, der links von allen Ziffern von z steht. Dieser ist durch $0 + 0 + \varepsilon$ zu ersetzen und muss damit zwar noch nicht gleich null sein, da in seine Berechnung ein Übertrag $\varepsilon > 0$ eingehen kann. Allerdings gilt an der nächsten und jeder weiteren Position für den Übertrag stets $\varepsilon = 0$. Somit müssen links von dieser Spalte alle Sterne durch Nullen ersetzt werden.

Damit ist die Behauptung für den Fall $z \geq 0$ vollständig bewiesen.

Ist $z < 0$, so beachte man, dass $z = u - g$ gleichbedeutend ist mit $(-z) + u = g$, und es gilt $-z > 0$. Wie in der Anmerkung zu Teil a) an einem Beispiel ausgeführt, kann man die schriftliche Additionsaufgabe $(-z) + u = g$ auf dieselbe Weise eindeutig lösen wie oben für den Fall $z > 0$ und $z + g = u$ ausgeführt.

Damit ist die Behauptung auch für den Fall $z < 0$ vollständig bewiesen.

Lösungsvariante: Da eine Steppenzebrazahl g auf Null endet, kann sie als $g = 10\,u$ mit einer eindeutig bestimmten Bergzebrazahl u dargestellt werden.

Wir beweisen zunächst den folgenden

> *Hilfssatz:* Zu jeder ganzen Zahl $z > 0$ gibt es eindeutig bestimmte Bergzebrazahlen u_1, u_2, u_3 und u_4 mit
>
> $$z = u_1 - 10\,u_2 \text{ (Typ 1)} \qquad \text{und} \qquad z = 10\,u_3 - u_4 \text{ (Typ 2)}.$$

Den Beweis führen wir mit Induktion nach z, indem wir zeigen:

- Die Behauptung gilt für alle einstelligen z (Induktionsanfang).
- Wenn die Behauptung für alle z' mit $0 < z' < z$ gilt (Induktionsvoraussetzung), dann gilt sie auch für z (Induktionsschluss).

Sei zunächst $z = a$ mit $0 < a \leq 9$ einstellig und $b = 10 - a$ die Komplementärziffer zu a.

In einer Zerlegung $z = a = u_1 - 10\,u_2$ vom Typ 1 muss u_1 auf die Ziffer a enden und damit die Gestalt $u_1 = 100\,u_1' + a$ mit der Bergzebrazahl u_1' haben. Aus $z = u_1 - 10\,u_2$ folgt $100\,u_1' = 10\,u_2$, weiter $t = 10\,u_1' = u_2$ und damit $t = u_1' = u_2 = 0$, da t zugleich Berg- und Steppenzebrazahl ist und damit gleich null sein muss. $z = a - 0$ ist also die einzige Zerlegung von z vom Typ 1.

In einer Zerlegung $z = a = 10\,u_3 - u_4$ vom Typ 2 muss u_4 auf die Ziffer b enden und damit die Gestalt $u_4 = 100\,u_4' + b$ mit der Bergzebrazahl u_4' haben. Damit gilt

$$10\,u_3 = z + u_4 = 100\,u_4' + a + b = 100\,u_4' + 10$$

und somit $t = u_3 - 1 = 10\,u_4'$. Die Zahl u_3 muss damit auf die Ziffer 1 enden und $u_3 - 1$ ist ebenfalls eine Bergzebrazahl. Es folgt wie eben $t = u_3 - 1 = u_4' = 0$. $z = 10 - b$ ist also die einzige Zerlegung von z vom Typ 2.

Sei nun z mehrstellig und z' die Zahl, welche durch Streichen der letzten Ziffer a von z entsteht, also $z = 10\,z' + a$. Dann ist $z' < z' + 1 < z$, und die Behauptung des Hilfssatzes gilt nach Induktionsvoraussetzung für z' und für $z' + 1$.

In einer Zerlegung $z = u_1 - 10\,u_2$ vom Typ 1 muss u_1 auf die Ziffer a enden, womit $u_1 = 100\,u_1' + a$ mit der Bergzebrazahl u_1' gilt. Es folgt $z' = 10\,u_1' - u_2$, und dies ist die nach Induktionsvoraussetzung eindeutige Zerlegung von z' vom Typ 2. z hat also *höchstens* eine Zerlegung vom Typ 1. Umgekehrt erhält man aus einer Zerlegung $z' = 10\,u_1' - u_2$ vom Typ 2 die Zerlegung $z = (100\,u_1' + a) - 10\,u_2$ vom Typ 1. z hat also *genau* eine Zerlegung vom Typ 1 wie behauptet.

Ist $a = 0$ und $z = 10\,u_3 - u_4$ eine Zerlegung vom Typ 2, so muss u_4 auf 0 enden, womit $u_4 = 100\,u_4'$ mit der Bergzebrazahl u_4' gilt. Wie eben ergibt sich, dass $z' = u_3 - 10\,u_4'$ die nach Induktionsvoraussetzung eindeutige Zerlegung von z' vom Typ 1 ist und für $a = 0$ die Zahl z *höchstens* eine Zerlegung vom Typ 2 hat. Umgekehrt erhält man aus der Zerlegung $z' = u_3 - 10\,u_4'$ vom Typ 1 die Zerlegung $z = 10\,u_3 - 100\,u_4'$ vom Typ 2, womit wiederum gezeigt ist, dass die Zahlen z mit Endziffer 0 *genau* eine Zerlegung vom Typ 2 haben wie behauptet.

Ist $0 < a \leq 9$, $b = 10 - a$ die Komplementärziffer zu a und $z = 10\,u_3 - u_4$ eine Zerlegung vom Typ 2, so muss u_4 auf b enden, womit $u_4 = 100\,u_4' + b$ mit der Bergzebrazahl u_4' gilt. Weiter folgt

$$10\,u_3 = z + u_4 = 10\,z' + a + b + 100\,u_4' = 10\,(z' + 1) + 100\,u_4'\,.$$

Damit ist $z' + 1 = u_3 - 10\,u_4'$ die nach Induktionsvoraussetzung eindeutige Zerlegung von $z' + 1$ vom Typ 1 und z hat *höchstens* eine Zerlegung vom Typ 2. Da sich andererseits aus der Zerlegung $z' + 1 = u_3 - 10\,u_4'$ vom Typ 1 die Zerlegung $z = 10\,(z' + 1) - b = 10\,u_3 - (100\,u_4' + b)$ vom Typ 2 ergibt, ist auch in diesem Fall gezeigt, dass z *genau* eine Zerlegung vom Typ 2 hat wie behauptet.

Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Die in Teil b) gesuchten eindeutigen Darstellungen ergeben sich nun für $z > 0$ aus der Darstellung von z vom Typ 1 und für $z < 0$ aus der Darstellung von $-z$ vom Typ 2. $z = 0$ hat die eindeutige Darstellung $0 = u - g$ mit $u = g = 0$, da null die einzige Zahl ist, die zugleich Berg- und Steppenzebrazahl ist.

Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

Aufgabe 571031 *Insgesamt: 6 Punkte*

Teil a) .... 2 Punkte
Teil b) .... 4 Punkte

Aufgabe 571032 *Insgesamt: 7 Punkte*

Herleitung der notwendigen Bedingung $n \geq 15$ .... 1 Punkt
Auffinden und Beweis zielführender geometrischer Zusammenhänge .... 3 Punkte
Korrekte Herleitung der Lösung $n = 19$ als notwendige Bedingung .... 1 Punkt
Korrekte Herleitung der Lösung $n = 38$ als notwendige Bedingung .... 1 Punkt
Nachweis der Existenz von Dreiecken für die gefundenen n (hinreichende Bedingung) .... 1 Punkt

Aufgabe 571033 *Insgesamt: 7 Punkte*

Teil a) Beispiel .... 2 Punkte
Teil b) .... 5 Punkte
- Argumentation .... 2 Punkte
- Fall $z > 0$ .... 1 Punkt
- Fall $z = 0$ .... 1 Punkt
- Fall $z < 0$ .... 1 Punkt