Olympiadeklasse **9**

57. Mathematik–Olympiade
3. Runde (Landesrunde)
Lösungen – 2. Tag

570934 Lösung *6 Punkte*

Es sei a die Stundenleistung des Mähdreschers A. Die Zahl a gibt dabei an, welchen Anteil des betrachteten Feldes A innerhalb einer Stunde bearbeiten kann. Analog seien die Stundenleistungen der anderen beiden Mähdrescher mit b und c bezeichnet.

Die gegebenen Informationen führen dann zu folgendem linearen Gleichungssystem:

$$9\,a + 2\,b = 1\,, \tag{1}$$

$$4\,a + 3\,c = \frac{2}{3}\,, \tag{2}$$

$$2\,b + 3\,c = \frac{7}{12}\,. \tag{3}$$

Umstellen von (1) nach b und von (2) nach c liefert jeweils

$$2\,b = 1 - 9\,a \quad \text{und} \quad 3\,c = \frac{2}{3} - 4\,a\,. \tag{4}$$

Eingesetzt in (3) ergibt sich daraus nacheinander

$$\frac{7}{12} = 2\,b + 3\,c = (1 - 9\,a) + \left(\frac{2}{3} - 4\,a\right) = \frac{5}{3} - 13\,a\,,$$

$$13\,a = \frac{5}{3} - \frac{7}{12} = \frac{13}{12}\,,$$

$$a = \frac{1}{12}\,.$$

Einsetzen in (4) ergibt

$$2\,b = 1 - 9\,a = 1 - \frac{9}{12} = \frac{1}{4} \quad \text{und damit} \quad b = \frac{1}{8}$$

sowie

$$3\,c = \frac{2}{3} - 4\,a = \frac{2}{3} - \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \quad \text{und damit} \quad c = \frac{1}{9}\,.$$

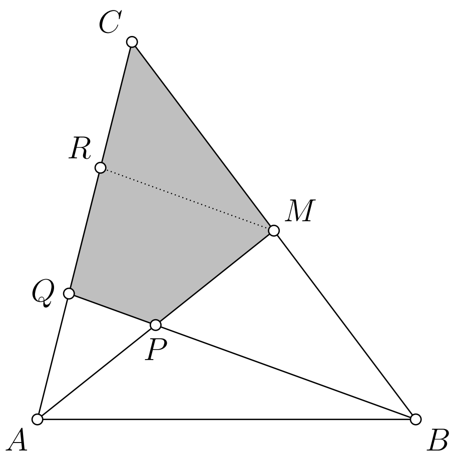
Aus dem Ausgangssystem folgt also

$$a = \frac{1}{12},\ b = \frac{1}{8},\ c = \frac{1}{9}\,.$$

Somit gilt: Mähdrescher A benötigt 12 Stunden, um das Feld allein abzuernten, Mähdrescher B benötigt dafür 8 Stunden und Mähdrescher C benötigt dafür 9 Stunden.

Anmerkung: Die Existenz einer Lösung darf als durch die Aufgabenstellung vorausgesetzt gelten.

570935 Lösung *7 Punkte*



Nach der Dreiecksflächenformel gilt

$$\mathrm{A}_{MCQP} = \mathrm{A}_{AMC} - \mathrm{A}_{APQ} \quad \text{und} \quad \mathrm{A}_{AMC} = \frac{1}{2}\,\mathrm{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\,.$$

Es bleibt also A_{APQ} zu bestimmen.

Wir zeigen zunächst die Gültigkeit von $|AQ| : |AC| = 1 : 3$. Dazu sei R der Mittelpunkt der Strecke $\overline{QC}$. Dann ist die Strecke $\overline{MR}$ Mittellinie im Dreieck QBC und folglich $MR \parallel BQ$. Da P auf der Geraden BQ liegt und Mittelpunkt der Strecke $\overline{AM}$ ist, ist die Strecke $\overline{PQ}$ Mittellinie im Dreieck AMR, also ist $|AQ| = |QR| = |RC|$.

Damit gilt $\mathrm{A}_{ABQ} = \frac{1}{3}\,\mathrm{A}_{ABC} = \frac{1}{3}$, da die Längen der Grundseiten $\overline{AQ}$ und $\overline{AC}$ zur selben Höhe im Verhältnis $1 : 3$ stehen. Da P der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AM}$ ist, gilt $\mathrm{A}_{ABP} = \frac{1}{2}\,\mathrm{A}_{ABM}$. Da M der Mittelpunkt der Strecke $\overline{BC}$ ist, gilt weiter $\mathrm{A}_{ABM} = \frac{1}{2}\,\mathrm{A}_{ABC} = \frac{1}{2}$ und schließlich

$$\mathrm{A}_{APQ} = \mathrm{A}_{ABQ} - \mathrm{A}_{ABP} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}\,.$$

Wir erhalten daraus unmittelbar

$$\mathrm{A}_{MCQP} = \mathrm{A}_{AMC} - \mathrm{A}_{APQ} = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{5}{12}\,.$$

Der gesuchte Flächeninhalt beträgt also $\frac{5}{12}$.

570936 Lösung *7 Punkte*

Teil a) Eine der betrachteten Städte bezeichnen wir mit A. Nach dem Schubfachprinzip gibt es mindestens drei Städte, die von der Stadt A aus mit dem gleichen Verkehrsmittel erreichbar sind; drei solche Städte bezeichnen wir mit B, C und D. Verbindet dieses Verkehrsmittel auch zwei dieser drei Städte untereinander, dann gibt es eine Rundreise durch A und diese zwei Städte. Andernfalls gibt es eine Rundreise mit dem anderen Verkehrsmittel durch B, C und D.

Teil b) Wir stellen uns die Städte in einem Fünfeck angeordnet vor. Auf dem Umfang des Fünfecks liegt eine Bahnstrecke, jede Stadt ist durch eine Zugverbindung mit ihren beiden Nachbarstädten verbunden. Auf den Diagonalen des Fünfecks liegen Straßen, zwischen den Enden jeder Diagonalen besteht eine Busverbindung. Dann gibt es keine Rundreisen durch drei Städte mit nur einem Verkehrsmittel.

Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

Aufgabe 570934	*Insgesamt: 6 Punkte*
Erfassen der Zusammenhänge in Formeln	2 Punkte
Auflösen der Gleichungen und Herleitung des Ergebnisses	4 Punkte

Aufgabe 570935	*Insgesamt: 7 Punkte*
Zielführende Flächenzerlegung	2 Punkte
Bestimmung zielführender Streckenverhältnisse	3 Punkte
Genaue Ausführung des Ansatzes	2 Punkte

Aufgabe 570936	*Insgesamt: 7 Punkte*
Teil a)	4 Punkte
Teil b)	3 Punkte