Olympiadeklasse

9

57. Mathematik–Olympiade
3. Runde (Landesrunde)
Lösungen – 1. Tag

© 2017 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
`www.mathematik-olympiaden.de`. Alle Rechte vorbehalten.

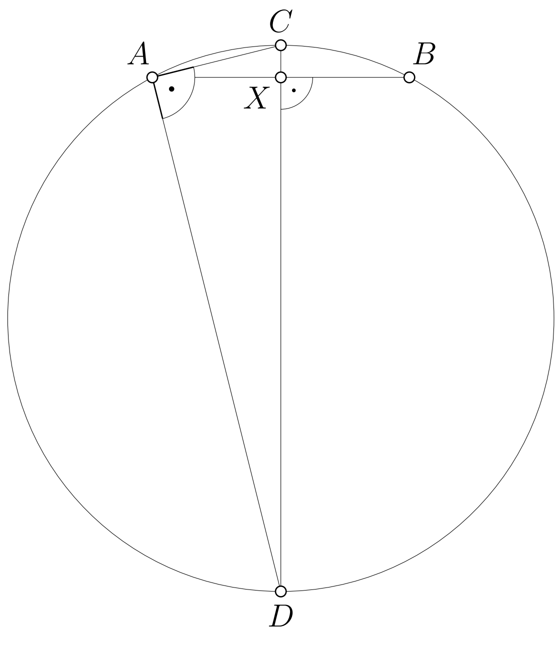
570931 Lösung *6 Punkte*

Teil a) Da es für jeden Buchstaben genau zwei Möglichkeiten gibt und diese Möglichkeiten unabhängig voneinander gewählt werden können, gibt es insgesamt $2^{11} = 2048$ solche Wörter.

Teil b) Wenn in einem solchen Wort die ersten acht Buchstaben gleich sein sollen, dann gibt es für diese Buchstaben genau 2 Möglichkeiten und für jeden der letzten drei Buchstaben auch 2 Möglichkeiten. Es gibt also 2^4 Wörter, die mit acht gleichen Buchstaben beginnen. Analog gibt es genau 2^4 Wörter, die mit acht gleichen Buchstaben enden. Wörter, die sowohl mit acht gleichen Buchstaben beginnen als auch mit acht gleichen Buchstaben enden, sind nur diejenigen, die aus elf gleichen Buchstaben bestehen, also genau 2. Damit ist die Anzahl der gesuchten Wörter (nach dem Prinzip von Inklusion und Exklusion) gleich

$$2^{11} - 2^4 - 2^4 + 2 = 2018.$$

570932 Lösung *7 Punkte*



Wir betrachten nur die Grundfläche der Ausgangsscheibe. Auf diesem Kreis seien A und B die Endpunkte der Schnittkante. Durch diese Punkte wird der Kreis in zwei Kreisbögen zerlegt. Einer dieser Kreisbögen gehört zum betrachteten Holzstück; der Mittelpunkt dieses Bogens werde mit C bezeichnet. Der auf dem Kreis dem Punkt C gegenüberliegende Punkt D ist der Mittelpunkt des anderen Kreisbogens. Die Gerade CD ist die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$, schneidet sie also senkrecht im Mittelpunkt X von $\overline{AB}$.

Das Dreieck ACD hat nach dem Satz des Thales einen rechten Winkel bei A, und X ist der Höhenfußpunkt der von A auf $\overline{CD}$ gefällten Höhe.

Nach Voraussetzung gilt $|XC| = 1\,\text{cm}$. Da die Schnittfläche ein Rechteck ist, dessen eine Seite $|AB|$ und dessen andere Seite 5 mm lang ist, folgt

$$|AB| = \frac{4\,\text{cm}^2}{5\,\text{mm}} = 8\,\text{cm}$$

und daher $|AX| = 4\,\text{cm}$. Um nun den Radius zu ermitteln, gibt es verschiedene Varianten, von denen wir zwei angeben:

Lösungsvariante: Nach dem Höhensatz gilt $|AX|^2 = |XD| \cdot |XC|$. Wegen $|AX| = 4\,\text{cm}$ und $|XC| = 1\,\text{cm}$ folgt $|XD| = 16\,\text{cm}$. Also hat der betrachtete Kreis den Durchmesser $|CD| = |XC| + |XD| = 17\,\text{cm}$ und somit den Radius $r = 8{,}5\,\text{cm}$.

Weitere Lösungsvariante: Das Dreieck AXC hat einen rechten Winkel bei X. Somit gilt nach dem Satz des Pythagoras

$$|AC|^2 = |AX|^2 + |XC|^2 = 17\,\text{cm}^2.$$

Weil das Dreieck ACD einen rechten Winkel bei A hat, gilt nach dem Kathetensatz des Euklid

$$|AC|^2 = |CX| \cdot |CD|\,,$$

und wegen $|CX| = 1\,\text{cm}$ folgt $|CD| = 17\,\text{cm}$.

Also hat der gesuchte Radius die Länge 8,5 cm.

570933 Lösung *7 Punkte*

Teil a) Wir lösen die schriftliche Additionsaufgabe $570933 + g = u$. Da eine Steppenzebrazahl genau dann gegeben ist, wenn die Einerziffer Null ist und dann nach vorne gesehen jede zweite Ziffer Null ist, und eine Bergzebrazahl genau dann gegeben ist, wenn die Zehnerziffer Null und wieder nach vorne gesehen jede zweite Ziffer Null ist, ergibt sich:

$$\begin{array}{rcccccccccc} & & & & & 5 & 7 & 0 & 9 & 3 & 3 \\ + & \dots & * & 0 & * & 0 & * & 0 & * & 0 & * & 0 \\ \hline & & \dots & 0 & * & 0 & * & 0 & * & 0 & * & 0 & * \end{array}$$

Von rechts nach links lassen sich alle Sterne eindeutig durch Ziffern ersetzen, man erhält

$$\begin{array}{rccccccc} & & 5 & 7 & 0 & 9 & 3 & 3 \\ + & & 5 & 0 & 9 & 0 & 7 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}$$

Man kann also $u = 1080003$ und $g = 509070$ wählen.

Anmerkung: Ähnlich kann man eine Darstellung $570933 + u' = g'$ finden: Aus dem Ansatz

$$\begin{array}{rcccccccccc} & & & & & 5 & 7 & 0 & 9 & 3 & 3 \\ + & \dots & * & 0 & * & 0 & * & 0 & * & 0 & * \\ \hline & & \dots & 0 & * & 0 & * & 0 & * & 0 & * & 0 \end{array}$$

ergibt sich

$$\begin{array}{rrrrrrr} & 5 & 7 & 0 & 9 & 3 & 3 \\ + & & 3 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ \hline & 6 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \end{array}$$

Man kann also $u' = 30107$ und $g' = 601040$ wählen.

Teil b) $z = 0$ hat die eindeutige Darstellung $0 = u - g$ mit $u = g = 0$, da null die einzige Zahl ist, die zugleich Berg- und Steppenzebrazahl ist.

Sei zunächst $z > 0$. Wie in Teil a) wird die schriftliche Additionsaufgabe $z + g = u$ gelöst, indem man spaltenweise von rechts nach links alle Sterne durch Ziffern ersetzt.

Angenommen, der Stern steht in der untersten Zeile und in den Zeilen darüber die Ziffern a und 0. Außerdem ist aus der bisherigen Rechnung ein Übertrag ε zu berücksichtigen, der 0 oder 1 betragen kann. In diesem Fall geht man wie bei der schriftlichen Addition vor:

$$\begin{array}{cccc} & \ldots & a & \ldots \\ + & \ldots & 0_\varepsilon & \ldots \\ \hline & \ldots & * & \ldots \end{array}$$

Gilt $a + \varepsilon < 10$, so ist der Stern durch $a + \varepsilon$ zu ersetzen, und es entsteht 0 als neuer Übertrag. Andernfalls gilt $a + \varepsilon = 10$, der Stern muss durch die Ziffer 0 ersetzt werden, und es entsteht 1 als neuer Übertrag.

Angenommen, der Stern steht in der mittleren Zeile, darüber steht die Ziffer a, darunter eine Null, und ein Übertrag $\varepsilon \in \{0, 1\}$ ist zu berücksichtigen.

$$\begin{array}{cccc} & \ldots & a & \ldots \\ + & \ldots & *_\varepsilon & \ldots \\ \hline & \ldots & 0 & \ldots \end{array}$$

Ist $a = \varepsilon = 0$, so muss der Stern durch die Ziffer 0 ersetzt werden, und es entsteht 0 als neuer Übertrag. Andernfalls ist wegen $a + \varepsilon \leq 10$ der Stern durch die Ziffer $10 - a - \varepsilon$ zu ersetzen, und es entsteht 1 als neuer Übertrag.

Es ist nur noch zu klären, dass dieser Vorgang abbricht, dass es also eine Spalte gibt, ab der weiter links alle Sterne durch Nullen ersetzt werden. Dazu betrachen wir den ersten Stern in der unteren Zeile, der links von allen Ziffern von z steht. Dieser ist durch $0 + 0 + \varepsilon$ zu ersetzen und muss damit zwar noch nicht gleich null sein, da in seine Berechnung ein Übertrag $\varepsilon > 0$ eingehen kann. Allerdings gilt an der nächsten und jeder weiteren Position für den Übertrag stets $\varepsilon = 0$. Somit müssen links von dieser Spalte alle Sterne durch Nullen ersetzt werden.

Damit ist die Behauptung für den Fall $z \geq 0$ vollständig bewiesen.

Ist $z < 0$, so beachte man, dass $z = u - g$ gleichbedeutend ist mit $(-z) + u = g$, und es gilt $-z > 0$. Wie in der Anmerkung zu Teil a) an einem Beispiel ausgeführt, kann man die schriftliche Additionsaufgabe $(-z) + u = g$ auf dieselbe Weise eindeutig lösen wie oben für den Fall $z > 0$ und $z + g = u$ ausgeführt.

Damit ist die Behauptung auch für den Fall $z < 0$ vollständig bewiesen.

Lösungsvariante: Da eine Steppenzebrazahl g auf Null endet, kann sie als $g = 10\,u$ mit einer eindeutig bestimmten Bergzebrazahl u dargestellt werden.

Wir beweisen zunächst den folgenden

> *Hilfssatz:* Zu jeder ganzen Zahl $z > 0$ gibt es eindeutig bestimmte Bergzebrazahlen u_1, u_2, u_3 und u_4 mit
>
> $$z = u_1 - 10\,u_2 \text{ (Typ 1)} \qquad \text{und} \qquad z = 10\,u_3 - u_4 \text{ (Typ 2)}.$$

Den Beweis führen wir mit Induktion nach z, indem wir zeigen:

- Die Behauptung gilt für alle einstelligen z (Induktionsanfang).
- Wenn die Behauptung für alle z' mit $0 < z' < z$ gilt (Induktionsvoraussetzung), dann gilt sie auch für z (Induktionsschluss).

Sei zunächst $z = a$ mit $0 < a \leq 9$ einstellig und $b = 10 - a$ die Komplementärziffer zu a.

In einer Zerlegung $z = a = u_1 - 10\,u_2$ vom Typ 1 muss u_1 auf die Ziffer a enden und damit die Gestalt $u_1 = 100\,u_1' + a$ mit der Bergzebrazahl u_1' haben. Aus $z = u_1 - 10\,u_2$ folgt $100\,u_1' = 10\,u_2$, weiter $t = 10\,u_1' = u_2$ und damit $t = u_1' = u_2 = 0$, da t zugleich Berg- und Steppenzebrazahl ist und damit gleich null sein muss. Also ist $z = a - 0$ die einzige Zerlegung von z vom Typ 1.

In einer Zerlegung $z = a = 10\,u_3 - u_4$ vom Typ 2 muss u_4 auf die Ziffer b enden und damit die Gestalt $u_4 = 100\,u_4' + b$ mit der Bergzebrazahl u_4' haben. Damit gilt

$$10\,u_3 = z + u_4 = 100\,u_4' + a + b = 100\,u_4' + 10$$

und somit $t = u_3 - 1 = 10\,u_4'$. Die Zahl u_3 muss damit auf die Ziffer 1 enden und $u_3 - 1$ ist ebenfalls eine Bergzebrazahl. Es folgt wie eben $t = u_3 - 1 = u_4' = 0$. $z = 10 - b$ ist also die einzige Zerlegung von z vom Typ 2.

Sei nun z mehrstellig und z' die Zahl, welche durch Streichen der letzten Ziffer a von z entsteht, also $z = 10\,z' + a$. Dann ist $z' < z' + 1 < z$, und die Behauptung des Hilfssatzes gilt nach Induktionsvoraussetzung für z' und für $z' + 1$.

In einer Zerlegung $z = u_1 - 10\,u_2$ vom Typ 1 muss u_1 auf die Ziffer a enden, womit $u_1 = 100\,u_1' + a$ mit der Bergzebrazahl u_1' gilt. Es folgt $z' = 10\,u_1' - u_2$, und dies ist die nach Induktionsvoraussetzung eindeutige Zerlegung von z' vom Typ 2. Die Zahl z hat also *höchstens* eine Zerlegung vom Typ 1. Umgekehrt erhält man aus einer Zerlegung $z' = 10\,u_1' - u_2$ vom Typ 2 die Zerlegung $z = (100\,u_1' + a) - 10\,u_2$ vom Typ 1. z hat also *genau* eine Zerlegung vom Typ 1 wie behauptet.

Ist $a = 0$ und $z = 10\,u_3 - u_4$ eine Zerlegung vom Typ 2, so muss u_4 auf 0 enden, womit $u_4 = 100\,u_4'$ mit der Bergzebrazahl u_4' gilt. Wie eben ergibt sich, dass $z' = u_3 - 10\,u_4'$ die nach Induktionsvoraussetzung eindeutige Zerlegung von z' vom Typ 1 ist und für $a = 0$ die Zahl z *höchstens* eine Zerlegung vom Typ 2 hat. Umgekehrt erhält man aus der Zerlegung $z' = u_3 - 10\,u_4'$ vom Typ 1 die Zerlegung $z = 10\,u_3 - 100\,u_4'$ vom Typ 2, womit wiederum gezeigt ist, dass die Zahlen z mit Endziffer 0 *genau* eine Zerlegung vom Typ 2 haben wie behauptet.

Ist $0 < a \leq 9$, $b = 10 - a$ die Komplementärziffer zu a und $z = 10\,u_3 - u_4$ eine Zerlegung vom Typ 2, so muss u_4 auf b enden, womit $u_4 = 100\,u_4' + b$ mit der Bergzebrazahl u_4' gilt. Weiter folgt

$$10\,u_3 = z + u_4 = 10\,z' + a + b + 100\,u_4' = 10\,(z' + 1) + 100\,u_4'\,.$$

Damit ist $z' + 1 = u_3 - 10\,u_4'$ die nach Induktionsvoraussetzung eindeutige Zerlegung von $z' + 1$ vom Typ 1 und z hat *höchstens* eine Zerlegung vom Typ 2. Da sich andererseits aus der Zerlegung $z' + 1 = u_3 - 10\,u_4'$ vom Typ 1 die Zerlegung $z = 10\,(z' + 1) - b = 10\,u_3 - (100\,u_4' + b)$

vom Typ 2 ergibt, ist auch in diesem Fall gezeigt, dass z *genau* eine Zerlegung vom Typ 2 hat wie behauptet.

Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Die in Teil b) gesuchten eindeutigen Darstellungen ergeben sich nun für $z > 0$ aus der Darstellung von z vom Typ 1 und für $z < 0$ aus der Darstellung von $-z$ vom Typ 2. $z = 0$ hat die eindeutige Darstellung $0 = u - g$ mit $u = g = 0$, da null die einzige Zahl ist, die zugleich Berg- und Steppenzebrazahl ist.

Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

Aufgabe 570931 — *Insgesamt: 6 Punkte*

Teil a) .... 2 Punkte
Teil b) .... 4 Punkte

Aufgabe 570932 — *Insgesamt: 7 Punkte*

Erfassen der geometrischen Situation .... 2 Punkte
Zielführender und begründeter Ansatz .... 3 Punkte
Genaues Ausführen des Ansatzes .... 2 Punkte

Aufgabe 570933 — *Insgesamt: 7 Punkte*

Teil a) Beispiel .... 2 Punkte
Teil b) .... 5 Punkte
- Argumentation .... 2 Punkte
- Fall $z > 0$ .... 1 Punkt
- Fall $z = 0$ .... 1 Punkt
- Fall $z < 0$ .... 1 Punkt