Olympiadeklasse 8

57. Mathematik–Olympiade
3. Runde (Landesrunde)
Lösungen – 2. Tag

570834 Lösung *6 Punkte*

Eine der Freundinnen, nennen wir sie X, gab nicht mehr als ein Buch an jede ihrer vier Freundinnen weiter. Da sie genau vier Bücher besaß, hat sie jeder ihrer vier Freundinnen genau ein Buch gegeben. Da Anne ihre vier Bücher an Celina weitergab und Beate drei Bücher an Emely weitergab, können nur Celina, Denise oder Emely diese Freundin X sein. Wenn X nicht Celina ist, dann hat Celina von X und Anne zusammen schon fünf Bücher erhalten. Da jede Freundin genau vier Bücher erhielt, kann dies nicht sein. Folglich ist Celina die Freundin X und gab folglich genau ein Buch an Denise weiter.

Da Denise genau vier Bücher erhielt, Anne alle ihre Bücher an Celina weitergab und sie von Celina genau ein Buch bekam, muss sie drei Bücher von Beate und Emely bekommen haben. Da Beate von ihren vier Büchern genau drei an Emely weitergab, kann sie nur höchstens eines an Denise gegeben haben. Daher muss Denise genau zwei oder genau drei Bücher von Emely bekommen haben. Da Beate aber die einzige Freundin ist, die einer Freundin genau drei Bücher weitergab, kann Emely nur genau zwei Bücher an Denise gegeben haben.

Denise bekam folglich jeweils genau ein Buch von Beate und Celina und genau zwei Bücher von Emely.

Lösungsvariante: Wir füllen die Tabelle schrittweise aus.

Geber / Nehmer	Anne	Beate	Celina	Denise	Emily
Anne	×	0 (5)	1 (3)		
Beate	0 (1)	×	1 (3)		
Celina	4 (1)	0 (1)	×	0 (1)	0 (1)
Denise	0 (1)	1 (5)	1 (3)	×	2 (6)
Emily	0 (1)	3 (2)	1 (3)	0 (4)	×

(1) Celina erhielt alle 4 Bücher von Anne.
(2) Beate gab genau 3 Bücher an Emily.
(3) Eine der Freundinnen gab je Freundin nicht mehr als ein Buch weiter. Da sie aber 4 Bücher an 4 Freundinnen weitergab, gab sie jeder ihrer Freundinnen genau ein Buch und ist Celina.
(4) Da Emily nun schon 4 Bücher erhalten hat, bekam sie von Denise kein Buch.
(5) Beate kann ihr viertes Buch nur entweder an Anne oder an Denise gegeben haben. Wenn sie es an Anne gegeben hätte, dann müsste Denise noch 3 Bücher von Emily bekommen haben. Da aber nur Beate genau drei Bücher an eine Freundin weitergab, kann dies nicht sein. Also erhielt Denise ein Buch von Beate.

(6) Da Denise nun schon genau 2 Bücher bekommen hat und sie nur von Emily noch Bücher bekommen haben kann, erhielt sie von Emely genau 2 Bücher.

Denise bekam folglich jeweils genau ein Buch von Beate und Celina und genau zwei Bücher von Emely.

570835 Lösung *7 Punkte*

Da genau 26 Köpfe gezählt wurden und jeder Dreikopfdrache genau 3 Köpfe hat, können es nur höchstens 8 Dreikopfdrachen sein. Da genau 298 Beine gezählt wurden, jeder Vierzigfüßler genau 40 Beine hat und $40 \cdot 8 = 320 > 298$ gilt, können es nur höchstens 7 Vierzigfüßler sein. Da höchstens 7 Vierzigfüßler zusammen höchstens 7 Köpfe haben, aber 26 Köpfe gezählt wurden, müssen mindestens $(26 - 7 =)$ 19 Köpfe von Dreikopfdrachen sein. Da jeder Dreikopfdrache genau 3 Köpfe hat, sind es mindestens 7 Dreikopfdrachen. Es können folglich nur genau 7 oder genau 8 Dreikopfdrachen sein.

Wir nehmen an, dass es genau 8 Dreikopfdrachen sind. Diese haben zusammen genau $(8 \cdot 3 =)$ 24 Köpfe. Da jeder Vierzigfüßler genau einen Kopf hat, sind es $(26 - 24 =)$ 2 Vierzigfüßler, welche zusammen genau $(2 \cdot 40 =)$ 80 Beine haben. Daher müssen die 8 Dreikopfdrachen zusammen $(298 - 80 =)$ 218 Beine haben. Dies ist aber nicht möglich, da die Dreikopfdrachen eine gleiche Anzahl an Beinen haben, 218 aber nicht durch 8 teilbar ist. Folglich sind es genau 7 Dreikopfdrachen. Diese haben zusammen genau $(7 \cdot 3 =)$ 21 Köpfe. Da jeder Vierzigfüßler genau einen Kopf hat, sind es $(26 - 21 =)$ 5 Vierzigfüßler, welche zusammen genau $(5 \cdot 40 =)$ 200 Beine haben. Daher haben die 7 Dreikopfdrachen zusammen $(298 - 200 =)$ 98 Beine. Da die Dreikopfdrachen eine gleiche Anzahl an Beinen haben und $98 : 7 = 14$ gilt, hat jeder Dreikopfdrache genau 14 Beine.

Lösungsvariante: Es seien v die Anzahl der Vierzigfüßler, d die Anzahl der Dreikopfdrachen und x die Anzahl der Beine eines Dreikopfdrachens. Da jeder Vierzigfüßler genau einen Kopf, jeder Dreikopfdrache genau 3 Köpfe hat und bei ihnen genau 26 Köpfe gezählt wurden, gilt

$$v + 3 \cdot d = 26\,. \tag{1}$$

Da jeder Vierzigfüßler genau 40 Beine, jeder Dreikopfdrache genau x Beine hat und bei ihnen genau 298 Beine gezählt wurden, gilt

$$40 \cdot v + d \cdot x = 298\,. \tag{2}$$

Aus (1) folgt

$$v = 26 - 3 \cdot d\,. \tag{3}$$

Aus (3), $v \geq 0$ und der Ganzzahligkeit von d folgt $d \leq 8$. Durch Einsetzen von v aus (3) in (2) folgt $40 \cdot (26 - 3 \cdot d) + d \cdot x = 298$, $1040 - 120 \cdot d + d \cdot x = 298$ und schließlich

$$(120 - x) \cdot d = 742\,. \tag{4}$$

Wegen $x \geq 0$ folgt $d \geq 742/120$ und wegen der Ganzzahligkeit von d daher $d \geq 7$. Da $120 - x$ eine ganze Zahl ist, 8 aber kein Teiler von 742 ist, muss $d = 7$ und wegen (4) folglich $120 - x = 742 : 7 = 106$ und daher $x = 120 - 106 = 14$ gelten.

Jeder Dreikopfdrache hat daher genau 14 Beine.

Lösungsvariante: Es seien v die Anzahl der Vierzigfüßler, d die Anzahl der Dreikopfdrachen und x die Anzahl der Beine eines Dreikopfdrachens. Da jeder Vierzigfüßler genau einen Kopf, jeder Dreikopfdrache genau 3 Köpfe hat und bei ihnen genau 26 Köpfe gezählt wurden, gilt

$$v + 3 \cdot d = 26\,. \tag{1}$$

Da jeder Vierzigfüßler genau 40 Beine, jeder Dreikopfdrache genau x Beine hat und bei ihnen genau 298 Beine gezählt wurden, gilt

$$40 \cdot v + d \cdot x = 298\,. \tag{2}$$

Aus (1) folgt, dass v bei Division durch 3 den Rest 2 lässt. Daher gilt

$$v = 3 \cdot k + 2 \tag{3}$$

mit einer nichtnegativen ganzen Zahl k. Durch Einsetzen von v aus (3) in (2) folgt $40 \cdot 3k + 40 \cdot 2 + d \cdot x = 298$ und daher $120 \cdot k + d \cdot x = 218$. Da d und x nichtnegative ganze Zahlen sind, kann nur $k = 0$ oder $k = 1$ gelten.

Für $k = 0$ folgt $v = 2$ aus (3), $d = 8$ aus (1) und $x = 27{,}25$ aus (2). Da x nicht ganzzahlig ist, kann dies nicht sein.

Für $k = 1$ folgt $v = 5$ aus (3), $d = 7$ aus (1) und $x = 14$ aus (2).

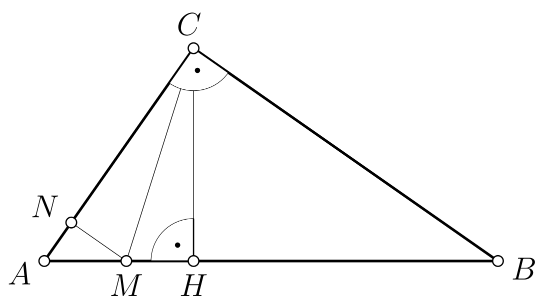
Jeder Dreikopfdrache hat daher genau 14 Beine.

570836 Lösung *7 Punkte*

Nach Voraussetzung gilt

$$|\sphericalangle CHA| = |\sphericalangle BHC| = 90^\circ\,. \tag{1}$$

Nach dem Innenwinkelsatz ist daher der Winkel $\sphericalangle BHC$ der größte Innenwinkel des Dreiecks BCH. Da dem größeren Winkel die längere Seite gegenüberliegt, folgt $|BM| = |BC| > |BH|$. Da der Punkt M nach Voraussetzung auf der Strecke $\overline{AB}$ liegt, liegt er folglich zwischen den Punkten A und H, siehe Abbildung L 570836. Daher gelten



L 570836

$$|\sphericalangle CBM| = |\sphericalangle CBA|\,, \tag{2}$$
$$|\sphericalangle CHM| = |\sphericalangle CHA|\,, \tag{3}$$
$$|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ACM| + |\sphericalangle MCB|\,, \tag{4}$$
$$|\sphericalangle BMC| = |\sphericalangle HMC|\,. \tag{5}$$

Da der Punkt N nach Aufgabenstellung auf der Strecke $|AC|$ liegt und wegen $|CN| = |CH|$ verschieden vom Punkt C ist, gilt

$$|\sphericalangle NCM| = |\sphericalangle ACM|\,. \tag{6}$$

Das Dreieck BCM ist wegen $|BC| = |BM|$ gleichschenklig mit der Basis $\overline{CM}$, woraus wegen (2) und nach dem Basiswinkelsatz und dem Innenwinkelsatz

$$|\sphericalangle MCB| = |\sphericalangle BMC| = 90^\circ - \frac{1}{2} \cdot |\sphericalangle CBA| \tag{7}$$

folgt. Nach Voraussetzung gilt $|\sphericalangle ACB| = 90^\circ$. Daher und aus (4) und (7) folgt

$$|\sphericalangle NCM| = 90^\circ - |\sphericalangle MCB| = \frac{1}{2} \cdot |\sphericalangle CBA|\,. \tag{8}$$

Aus (1), (3), (5) und (7) sowie nach dem Innenwinkelsatz angewandt auf das Dreieck CMH folgt

$$|\sphericalangle MCH| = 90^\circ - |\sphericalangle HMC| = \frac{1}{2} \cdot |\sphericalangle CBA|\,. \tag{9}$$

Daher sind die beiden Dreiecke CNM und CMH kongruent nach dem Kongruenzsatz (sws), denn sie haben die Seite $\overline{CM}$ gemeinsam, nach Voraussetzung gilt $|CH| = |CN|$ und nach (8) und (9) gilt $|\sphericalangle NCM| = |\sphericalangle MCH|$.

Wegen (1) und (3) gilt daher $|\sphericalangle MNC| = |\sphericalangle CHM| = 90^\circ$. Die Geraden MN und AC stehen folglich senkrecht aufeinander.

Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

Aufgabe 570834	*Insgesamt: 6 Punkte*
Prinzipiell geeignete Lösungsstrategie	1 Punkt
Vollständige Begründung	4 Punkte
Korrekte Antwort	1 Punkt

Aufgabe 570835	*Insgesamt: 7 Punkte*
Prinzipiell geeigneter Lösungsansatz	2 Punkte
Vollständige, begründete Herleitung der Lösung	4 Punkte
Ergebnis	1 Punkt

Aufgabe 570836	*Insgesamt: 7 Punkte*
Prinzipiell geeigneter Lösungsansatz	1 Punkt
Vollständiger Beweis	6 Punkte