Olympiadeklasse 8

57. Mathematik–Olympiade
3. Runde (Landesrunde)
Lösungen – 1. Tag

570831 Lösung *6 Punkte*

Wir nehmen an, dass Neles Angaben stimmen. Wir bezeichnen die Anzahl der großen roten Kugeln mit R. Da es genau dreimal so viele kleine blaue Kugeln sind wie große rote Kugeln, sind es $3 \cdot R$ kleine blaue Kugeln. Da in der Kiste genau 10 große weiße Kugeln sind und ein Drittel der weißen Kugeln klein ist, sind es $(\frac{1}{2} \cdot 10 =)$ 5 kleine weiße Kugeln. Da in der Kiste 8 kleine rote Kugeln sind, sind es zusammen $(5 + 8 + 3 \cdot R =)$ $3 \cdot R + 13$ kleine Kugeln. Andererseits sind in der Kiste auch 12 große blaue Kugeln, 10 große weiße Kugeln und R große rote Kugeln, zusammen also $(12 + 10 + R =)$ $R + 22$ große Kugeln. Nach Neles Angaben sind es genauso viele kleine wie große Kugeln. Es gilt also $3 \cdot R + 13 = R + 22$. Hieraus folgt $2 \cdot R = 9$. Da die Anzahl der großen roten Kugeln eine ganze Zahl ist, kann dies jedoch nicht stimmen.

Neles Angaben stimmen also nicht.

Lösungsvariante: Wir nehmen an, dass Neles Angaben stimmen. Wir bezeichnen mit w, W, b, B, r und R die Anzahl der kleinen bzw. großen weißen, blauen bzw. roten Kugeln.

Da die eine Hälfte der Kugeln kleine Kugeln und die andere Hälfte große Kugeln sind, sind es gleich viele große wie kleine Kugeln. Es gilt also

$$w + b + r = W + B + R\,. \tag{1}$$

Da es genau 12 große blaue Kugeln, genau 10 große weiße Kugeln und genau 8 kleine rote Kugeln sind, gelten

$$B = 12\,, \quad W = 10\,, \quad r = 8\,. \tag{2}$$

Da genau ein Drittel der weißen Kugeln klein ist, gilt $w = \frac{1}{3} \cdot (w + W)$ und daher

$$2 \cdot w = W\,. \tag{3}$$

Da es genau dreimal so viele kleine blaue Kugeln sind wie große rote Kugeln, gilt

$$b = 3 \cdot R\,. \tag{4}$$

Durch Einsetzen von (2), (3) und (4) in (1) folgt $\frac{1}{2} \cdot 10 + 3 \cdot R + 8 = 10 + 12 + R$ und hieraus $2 \cdot R = 9$. Da die Anzahl der großen roten Kugeln eine ganze Zahl ist, kann dies jedoch nicht stimmen.

Neles Angaben stimmen also nicht.

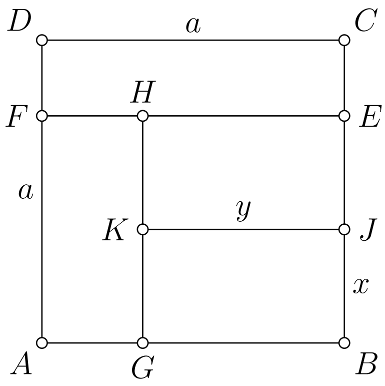
570832 Lösung *7 Punkte*

Wir bezeichnen mit u_{PQRS} den Umfang und mit A_{PQRS} den Flächeninhalt eines Rechtecks $PQRS$. Nach Voraussetzung gelten

$$|BJ| = x\,,\ |JK| = y \tag{1}$$

und

$$|AB| = |BC| = |CD| = |AD| = a\,. \tag{2}$$



L 570832

Da die Rechtecke $BJKG$ und $EHKJ$ die Seite $\overline{JK}$ gemeinsam haben und umfangsgleich sind, müssen auch die Seiten $\overline{BJ}$ und $\overline{EJ}$ gleich lang sein. Wegen (1) folgt daher

$$|EJ| = |BJ| = x\,. \tag{3}$$

Wegen (1) und (3) gilt für den gesuchten Flächeninhalt des Rechtecks $EHKJ$

$$A_{EHKJ} = |JK| \cdot |EJ| = x \cdot y\,. \tag{4}$$

Im Folgenden bestimmen wir x und y.

Da $AGHF$, $BJKG$, $CDFE$ und $EHKJ$ Rechtecke sind, folgt wegen (1), (2) und (3)

$$|AG| = |AB| - |BG| = |AB| - |JK| = a - y\,,$$
$$|CE| = |BC| - |BJ| - |EJ| = a - 2 \cdot x\,.$$

Hieraus, aus (1), (2) und (3) und nach der Umfangsformel für Rechtecke folgt

$$\frac{1}{2} \cdot u_{AGHF} = |GH| + |AG| = |BJ| + |EJ| + |AG| = 2 \cdot x + a - y\,, \tag{5}$$
$$\frac{1}{2} \cdot u_{BJKG} = |BJ| + |JK| = x + y\,, \tag{6}$$
$$\frac{1}{2} \cdot u_{CDFE} = |CD| + |CE| = a + a - 2 \cdot x = 2 \cdot a - 2 \cdot x\,. \tag{7}$$

Da die Rechtecke $BJKG$ und $CDFE$ umfangsgleich sind, folgt aus den Gleichungen (6) und (7) die Gleichung $x + y = 2 \cdot a - 2 \cdot x$ und hieraus

$$y = 2 \cdot a - 3 \cdot x\,. \tag{8}$$

Da die Rechtecke $AGHF$ und $BJKG$ umfangsgleich sind, folgt aus den Gleichungen (5) und (6) die Gleichung $2 \cdot x + a - y = x + y$, hieraus $2 \cdot x + a = x + 2 \cdot y$ und weiter durch Einsetzen von y aus (8) $2 \cdot x + a = x + 4 \cdot a - 6 \cdot x$, also $7 \cdot x = 3 \cdot a$. Daher und wegen (8) gelten

$$x = \frac{3}{7} \cdot a\,, \quad y = 2 \cdot a - \frac{9}{7} \cdot a = \frac{5}{7} \cdot a.$$

Hieraus und aus (4) folgt: Der Flächeninhalt des Rechtecks $EHKJ$ ist $(x \cdot y = \frac{3}{7} \cdot a \cdot \frac{5}{7} \cdot a =)$ $\frac{15}{49} \cdot a^2$.

570833 Lösung *7 Punkte*

I. Es seien a und b solche Zahlen. Die entstehenden Ergebnisse sind $a + b$, $b - a$, $a \cdot b$ und $\frac{b}{a}$. Nach Voraussetzung ist die Summe dieser Ergebnisse 625. Es gilt also

$$a + b + b - a + a \cdot b + \frac{b}{a} = 625\,.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} 2 \cdot a \cdot b + a^2 \cdot b + b &= 625 \cdot a\,, \\ b \cdot (a^2 + 2 \cdot a + 1) &= 625 \cdot a\,, \\ b \cdot (a+1)^2 &= 25^2 \cdot a \end{aligned}$$

und, da a positiv ist, schließlich

$$b = \frac{25^2 \cdot a}{(a+1)^2}\,. \tag{$*$}$$

Da a und b ganze Zahlen sind, muss $(a+1)^2$ ein Teiler von $25^2 \cdot a$ sein. Da a positiv ist, sind $a+1$ und a teilerfremd. Folglich muss $a+1$ ein Teiler von 25 sein. Da a positiv ist, kann daher nur $a+1 = 5$ oder $a+1 = 25$ gelten.

Aus $a+1 = 5$ folgt $a = 4$. Hieraus und aus $(*)$ folgt $b = 100$.

Aus $a+1 = 25$ folgt $a = 24$. Hieraus und aus $(*)$ folgt $b = 24$.

Es kann also nur $a = 4$ und $b = 100$ oder $a = 24$ und $b = 24$ gelten.

II. Wie die Probe zeigt, erfüllen $a = 4$ und $b = 100$ wie auch $a = 24$ und $b = 24$ alle Bedingungen.

Aus I. und II. folgt: Die Zahlen a und b können nur 4 und 100 sowie 24 und 24 sein.

Lösungsvariante: I. Es seien a und b solche Zahlen. Die entstehenden Ergebnisse sind $a+b$, $b-a$, $a \cdot b$ und $\frac{b}{a}$. Da a und b ganze Zahlen sind, sind auch $a+b$, $b-a$, $a \cdot b$ ganze Zahlen. Da die Summe 625 der Zahlen $a+b$, $b-a$, $a \cdot b$ und $\frac{b}{a}$ eine ganze Zahl ist, ist auch $\frac{b}{a}$ eine ganze Zahl. Folglich gibt es eine positive ganze Zahl k mit $b = a \cdot k$ und es gilt

$$625 = a + b + b - a + a \cdot b + \frac{b}{a} = 2 \cdot b + a \cdot b + \frac{b}{a} = 2 \cdot k \cdot a + k \cdot a^2 + k = k \cdot (a+1)^2\,.$$

Da a und k positive ganze Zahlen sind, können nur $k = 1$ und $a+1 = 25$ und daher $a = 24$ und $b = 24$ oder $k = 25$ und $a+1 = 5$ und daher $a = 4$ und $b = 100$ gelten.

II. Wie die Probe zeigt, erfüllen $a = 4$ und $b = 100$ wie auch $a = 24$ und $b = 24$ alle Bedingungen.

Aus I. und II. folgt: Die Zahlen a und b können nur 4 und 100 sowie 24 und 24 sein.

Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

Aufgabe 570831	*Insgesamt: 6 Punkte*
Prinzipiell geeignete Lösungsstrategie	1 Punkt
Vollständige Begründung	4 Punkte
Korrekte Antwort	1 Punkt

Aufgabe 570832	*Insgesamt: 7 Punkte*
Brauchbare Interpretation des Sachverhaltes (Skizze)	1 Punkt
Zielführende Lösungsidee	1 Punkt
Lückenlose Herleitung	4 Punkte
Korrektes Ergebnis	1 Punkt

Aufgabe 570833	*Insgesamt: 7 Punkte*
Prinzipiell geeignete Lösungsstrategie	1 Punkt
Vollständige Herleitung	4 Punkte
Probe	1 Punkt
Korrektes Ergebnis	1 Punkt