57. Mathematik–Olympiade
3. Runde (Landesrunde)
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

571234

Man beweise, dass für natürliche Zahlen m und n mit $m \geq 4$ und $n \geq m^2$ die Ungleichung

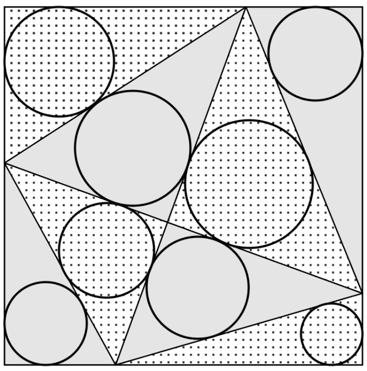
$$2^n \geq n^m$$

gilt.

571235

Ein Viereck mit zueinander senkrechten Diagonalen ist einem Quadrat so einbeschrieben, dass auf jeder Seite des Quadrates genau ein Eckpunkt des Vierecks liegt und die Seiten und Diagonalen des Vierecks das Quadrat in acht Dreiecke zerlegen. Jedes dieser Dreiecke wird in einer von zwei zur Verfügung stehenden Farben eingefärbt. Das soll so geschehen, dass zwei Dreiecke, die eine Seite gemeinsam haben, stets unterschiedliche Farbe besitzen, vgl. Abbildung A 571235.

Man beweise, dass die beiden Summen der Inkreisradien der Dreiecke jeweils gleicher Farbe gleich sind.



A 571235

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

571236

Man bestimme alle Tripel (x, y, z) reeller Zahlen, die das Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
y^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0\,, \\
z^3 - 6y^2 + 12y - 8 = 0\,, \\
x^3 - 6z^2 + 12z - 8 = 0
\end{aligned}
$$

erfüllen.