Olympiadeklasse **10**

57. Mathematik–Olympiade
3. Runde (Landesrunde)
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

571034

Drei Mähdrescher A, B und C besitzen unterschiedliche Mähleistungen. Folgendes ist bekannt:

(1) Wird ein Feld 9 Stunden von A und 2 Stunden von B bearbeitet, ist es komplett abgeerntet.
(2) Würde das gleiche Feld 4 Stunden von A und 3 Stunden von C bearbeitet, wären erst $\frac{2}{3}$ des Feldes abgeerntet.
(3) Würde das gleiche Feld 2 Stunden von B und 3 Stunden von C bearbeitet, wären erst $\frac{7}{12}$ des Feldes abgeerntet.

Ermitteln Sie, wie lange jeder einzelne der drei Mähdrescher brauchen würde, um das komplette Feld allein abzuernten.

Anmerkung: In den Aussagen (1) bis (3) wird vorausgesetzt, dass die Mähdrescher stets mit voller Leistung arbeiten.

571035

In einem Verkehrsverbund in Bayern gibt es zwischen je zwei Städten eine Busverbindung in beiden Richtungen oder eine Zugverbindung in beiden Richtungen (möglicherweise auch beides).

a) Zeigen Sie, dass es zu je sechs Städten immer mindestens eine Rundreise durch drei dieser Städte gibt, die sich mit nur einem Verkehrsmittel durchführen lässt.
b) Zeigen Sie, dass es zu fünf Städten nicht notwendigerweise eine Rundreise wie in a) gibt.
c) Zeigen Sie, dass es zu je sechs Städten immer mindestens zwei verschiedene Rundreisen durch je drei Städte gibt, die sich jeweils mit nur einem Verkehrsmittel durchführen lassen.

Im Teil c) dürfen die beiden Rundreisen verschiedene oder gleiche Verkehrsmittel benutzen. Zwei Rundreisen gelten dann als verschieden, wenn sie nicht dieselben drei Städte besuchen.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

571036

Gegeben ist ein konvexes Viereck $ABCD$ und ein Punkt N in seinem Inneren derart, dass

$$|AN| = |DN| = 8,\ |BN| = |CN| = 6 \text{ und } |\sphericalangle DNB| = |\sphericalangle ANC| = 120^\circ \tag{1}$$

gilt.

a) Ermitteln Sie den Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$ für $|\sphericalangle ANB| = 30^\circ$.

b) Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$ unter allen konvexen Vierecken, die (1) erfüllen, für $|\sphericalangle ANB| = 30^\circ$ maximal ist.

Hinweis: Ein Viereck heißt konvex, wenn beide Diagonalen innerhalb des Vierecks liegen.