Olympiadeklassen **11 – 12**

57. Mathematik-Olympiade
2. Runde (Regionalrunde)
Lösungen

571221 Lösung *10 Punkte*

Es sei z eine reelle Zahl, für die es positive ganze Zahlen a, b und c gibt, die das gegebene Gleichungssystem erfüllen. Aus der zweiten Gleichung folgt dann, dass z ebenfalls ganzzahlig sein muss. Weiterhin zeigt die dritte Gleichung, da c positiv ist, dass $z > 0$ gelten muss. Die Zahl z muss also ein positiver Teiler von 2017 sein.

Da 2017 durch keine der Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41 und 43 teilbar ist und das Quadrat der nächsten Primzahl 47 größer als 2017 ist, ist 2017 selbst eine Primzahl; somit ist $z = 1$ oder $z = 2017$.

Wäre nun $z = 1$, so hätten wir $c = 2017$ aufgrund der dritten Gleichung der Aufgabe und damit $a+b+c > 2017$ im Widerspruch zur ersten gegebenen Gleichung. Das Gleichungssystem ist somit für alle Werte $z \neq 2017$ unlösbar.

Es bleibt also nur der Fall $z = 2017$ zu betrachten. Angenommen, für diesen existiert eine Lösung (a, b, c) aus positiven ganzen Zahlen. Dann ergibt die letzte Gleichung der Aufgabe, dass $c = 1$ ist, und es verbleibt, das Gleichungssystem

$$a + b = 56\,, \tag{1}$$
$$a^2 + b^2 = 2018 \tag{2}$$

zu lösen. Aus (1) und (2) ergibt sich aber sofort

$$ab = \frac{1}{2}\left((a+b)^2 - (a^2+b^2)\right) = 28 \cdot 56 - 1009 = 1568 - 1009 = 559\,,$$

und die eindeutige Primfaktorzerlegung von 559 ist $13 \cdot 43$. Als Lösungen kommen somit nur $(1, 559, 1)$, $(559, 1, 1)$, $(13, 43, 1)$ und $(43, 13, 1)$ in Frage. Wegen $1 + 559 = 559 + 1 = 560 \neq 56$ verbleiben von diesen nur die beiden letzten Möglichkeiten.

Probe: Tatsächlich sind 13, 43 und 1 jeweils positive ganze Zahlen, und es gelten

$$13 + 43 + 1 = 57\,, \qquad 43 + 13 + 1 = 57\,,$$
$$13^2 + 43^2 - 1^2 = 169 + 1849 - 1 = 2017\,, \qquad 43^2 + 13^2 - 1^2 = 2017\,,$$
$$2017 \cdot 1 = 2017\,, \qquad 2017 \cdot 1 = 2017\,.$$

Antwort: Das gegebene Gleichungssystem ist genau für $z = 2017$ lösbar. In diesem Falle gibt es genau zwei Lösungen (a, b, c), nämlich

$$(43, 13, 1) \qquad \text{und} \qquad (13, 43, 1)\,.$$

Lösungsvariante: Nachdem man $z = 2017$ und $c = 1$ geschlussfolgert hat, kann das Gleichungssystem für die Bestimmung von a und b auch durch Umstellen von (1) nach b und Einsetzen in (2) gelöst werden,

$$\begin{aligned} a^2 + (56-a)^2 &= 2018\,, \\ 2a^2 - 112a + 56^2 - 2018 &= 0\,, \\ a^2 - 56a + 559 &= 0\,, \\ (a-28)^2 - 225 &= 0\,, \\ a &= 28 \pm 15\,. \end{aligned}$$

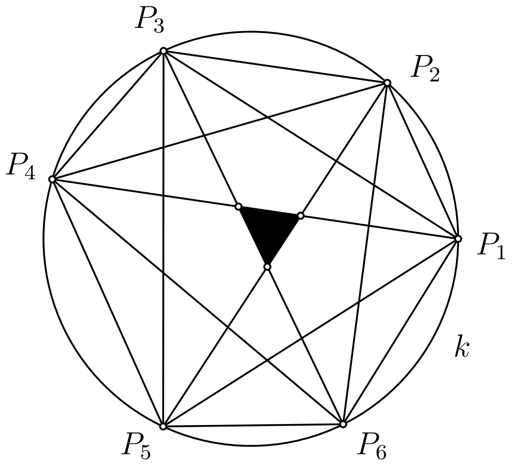
Einsetzen in $b = 56 - a$ ergibt somit $(43, 13, 1)$ und $(13, 43, 1)$ als einzige Lösungskandidaten.

Eine Probe bestätigt diese dann in derselben Weise wie bei der ersten Lösung.

Bemerkung: Es kann in Schülerlösungen akzeptiert werden, wenn die Primzahleigenschaft von 2017 als bekannter Fakt zitiert wird.

571222 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit sei angenommen, dass die Punkte P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 und P_6 in dieser Reihenfolge auf dem Kreis liegen, vgl. Abbildung L 571222 a.



L 571222 a

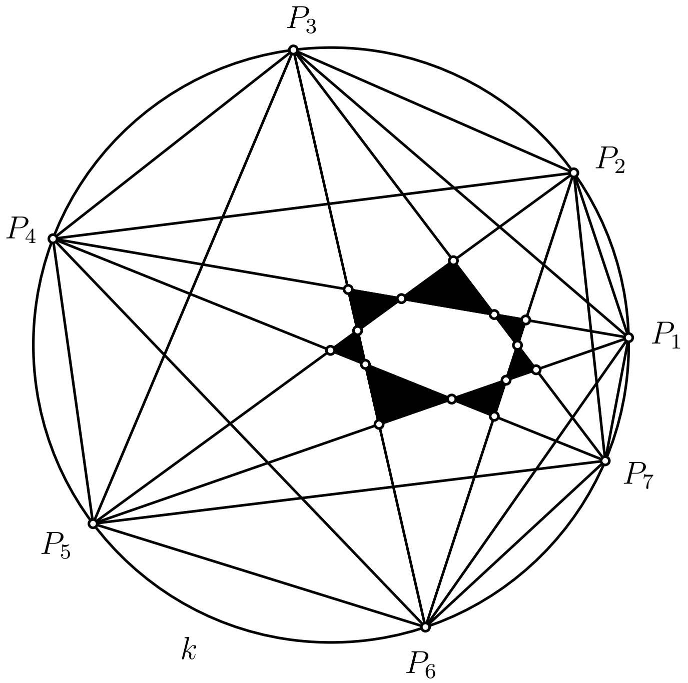
Bei einem laut Aufgabenstellung erlaubten Dreieck liegen die drei Seiten auf Verbindungsstrecken $\overline{P_aP_{a'}}$, $\overline{P_bP_{b'}}$ und $\overline{P_cP_{c'}}$. Da die Schnittpunkte jeweils innere Punkte des Kreises sein sollen, kann dabei keiner der Punkte $P_1, \ldots, P_6$ zwei dieser Strecken begrenzen. Folglich sind $P_a, P_{a'}, P_b, P_{b'}, P_c, P_{c'}$ exakt die sechs Punkte $P_1, \ldots, P_6$, nur eventuell in anderer Reihenfolge.

Die Strecke $\overline{P_aP_{a'}}$ teilt dabei den Kreis k in zwei Kreisbögen k' und k''. Damit die Strecken $\overline{P_bP_{b'}}$ und $\overline{P_cP_{c'}}$ die Strecke $\overline{P_aP_{a'}}$ schneiden können, muss deshalb bei beiden jeweils ein Endpunkt dem Kreisbogen k' angehören und der andere dem Kreisbogen k''. Nur die Verbindungsstrecken $\overline{P_1P_4}$, $\overline{P_2P_5}$ und $\overline{P_3P_6}$ haben jedoch die Eigenschaft, den Kreis k so zu teilen, dass beide Kreisbögen jeweils zwei der verbleibenden vier Punkte enthalten. Es kann folglich höchstens ein Dreieck im Sinne der Aufgabenstellung geben.

Andererseits liegen die drei Schnittpunkte von $\overline{P_1P_4}$, $\overline{P_2P_5}$ und $\overline{P_3P_6}$ im Innern des Kreises und bestimmen damit ein erlaubtes Dreieck. Es gibt im Falle $n = 6$ also genau ein Dreieck im Sinne der Aufgabenstellung, siehe Abbildung L 571222 a.

Teil b) Jedes erlaubte Dreieck hat seine Seiten auf Strecken $\overline{P_aP_{a'}}$, $\overline{P_bP_{b'}}$ und $\overline{P_cP_{c'}}$, die zu genau sechs der Punkte $P_1, \ldots, P_7$ gehören. Umgekehrt zeigt die Lösung zu Teil a), dass jede Auswahl von sechs der gegebenen sieben Punkte zu genau einem erlaubten Dreieck Anlass gibt.

Folglich gibt es genau sieben erlaubte Dreiecke, denn es gibt genau sieben Möglichkeiten, aus $P_1, \ldots, P_7$ sechs Punkte auszuwählen.



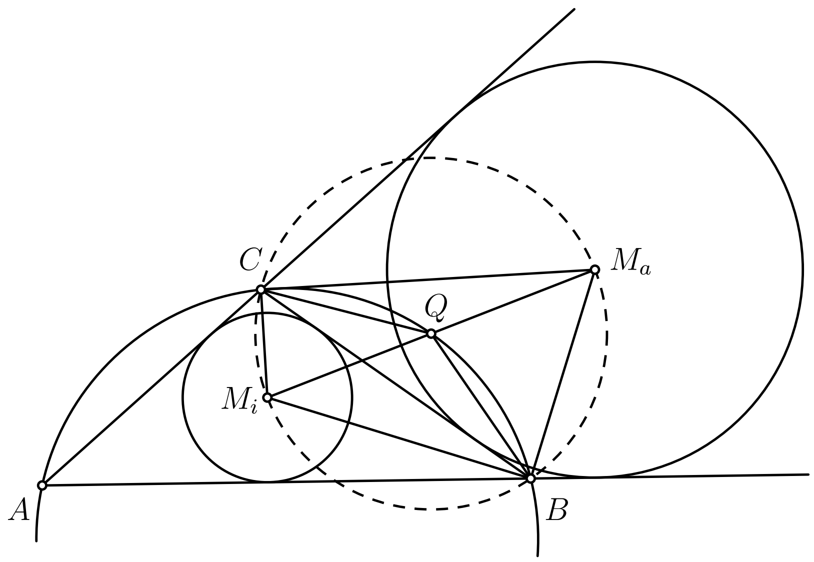
L 571222 b

Teil c) Wiederum hat jedes erlaubte Dreieck seine Seiten auf Verbindungsstrecken $\overline{P_aP_{a'}}$, $\overline{P_bP_{b'}}$ und $\overline{P_cP_{c'}}$, die zu genau sechs der Punkte $P_1, \ldots, P_n$ gehören. Weiterhin zeigt die Lösung zu Teil a), dass jede Auswahl von sechs der gegebenen n Punkte zu genau einem erlaubten Dreieck führt. Folglich gibt es genau

$$\binom{n}{6} = \frac{n!}{6!\,(n-6)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4) \cdot (n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$$

erlaubte Dreiecke, denn dies ist die Anzahl der Möglichkeiten, aus den Punkten $P_1, \ldots, P_n$ genau sechs auszuwählen, siehe Abbildung L 571222 b.

Bemerkung: Es ist selbstverständlich korrekt, wenn Teilnehmer Teil c) vorziehen und daraus die Antworten zu Teil b) und gegebenenfalls auch Teil a) als Spezialfall herleiten.



L 571223

Mit M_i wird der Mittelpunkt des Inkreises des Dreiecks ABC bezeichnet. Der Mittelpunkt des Ankreises, der die Seite $\overline{BC}$ von außen berührt, wird M_a genannt.

Da die Winkelhalbierenden von Außenwinkel und zugehörigem Innenwinkel eines Dreiecks senkrecht aufeinanderstehen, sind die Winkel $\sphericalangle M_iCM_a$ und $\sphericalangle M_aBM_i$ rechte Winkel. Folglich ist das Viereck BM_aCM_i ein Sehnenviereck, und nach der Umkehrung des Satzes von Thales ist der Mittelpunkt des Umkreises des Sehnenvierecks BM_aCM_i der Mittelpunkt Q der Strecke $\overline{M_iM_a}$.

Der geforderte Beweis ist erbracht, wenn gezeigt wird, dass der Punkt Q auf dem Umkreis des Dreiecks ABC liegt, also das Viereck $ABQC$ als Sehnenviereck nachgewiesen wird.

Aufgrund des Peripheriewinkelsatzes gilt

$$|\sphericalangle CM_aM_i| = |\sphericalangle CBM_i| \text{ und } |\sphericalangle BM_iM_a| = |\sphericalangle BCM_a| .$$

Werden die Innenwinkel des Dreiecks ABC mit α, β und γ bezeichnet, so ergibt sich demnach

$$|\sphericalangle CM_aB| = |\sphericalangle CM_aM_i| + |\sphericalangle M_iM_aB| = |\sphericalangle CBM_i| + |\sphericalangle M_iCB| = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}$$

und aufgrund des Peripherie-Zentriwinkel-Satzes

$$|\sphericalangle CQB| = 2 \cdot |\sphericalangle CM_aB| = \gamma + \beta.$$

Da $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ ist, muss das Viereck $ABQC$ ein Sehnenviereck sein, und der Punkt Q liegt gemeinsam mit den Punkten A, B und C auf dem Umkreis des Dreiecks.

Bemerkung: Es lässt sich analog zeigen, dass auch die Verbindungsstrecken zweier Ankreismittelpunkte vom Umkreis halbiert werden, beispielsweise durch eine geeignete Betrachtung der Lagebeziehung und eventuelles Vertauschen der Reihenfolge von Punkten in Sehnenvierecken oder durch Verwendung orientierter Winkel modulo 180°.

571224 Lösung *10 Punkte*

Für $a = b = c = d = 1/4$ gilt $p = 81$. Wir zeigen, dass dies der gesuchte kleinstmögliche Wert ist, d. h. dass unter den in der Aufgabe angegebenen Bedingungen für a, b, c und d stets $p \geq 81$ gilt. Im Folgenden werden verschiedene Beweise dieser Aussage gebracht.

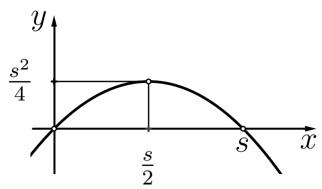
Erste Lösung: (Extremwertuntersuchung an Funktionen einer reellen Veränderlichen.)

Für jeden positiven reellen Parameter $s \leq 1/2$ betrachten wir die Funktion

$$f_s(x) = \left(\frac{1}{x} - 1\right)\left(\frac{1}{s-x} - 1\right)$$

auf dem Definitionsbereich $D_s = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < s\}$. Es gilt

$$f_s(x) = \frac{1}{x(s-x)} - \frac{1}{x} - \frac{1}{s-x} + 1 = \frac{1-s}{x(s-x)} + 1 > 0\,.$$



L 571224

$y = g_s(x) = x(s-x)$

Der Funktionswert $f_s(x)$ wird genau dann minimal, wenn der Nenner $g_s(x) = x(s-x)$ maximal wird. Für die quadratische Funktion $g_s(x) = s^2/4 - (x - s/2)^2$ ist das genau für $x = s/2$ der Fall (vgl. Abb. L 571224). Somit gilt

$$f_s(x) \geq f_s\left(\frac{s}{2}\right) = \left(\frac{1}{s/2} - 1\right)^2. \tag{1}$$

Wir setzen $a + b = s$ und $c + d = t$. Dann gilt

$$\frac{s}{2} + \frac{t}{2} = \frac{1}{2}\,.$$

Wenden wir (1) dreimal an, so erhalten wir die gewünschte Abschätzung:

$$\begin{aligned} p &= f_s(a) \cdot f_t(c) \\ &\geq f_s\left(\frac{s}{2}\right) \cdot f_t\left(\frac{t}{2}\right) = \left(\left(\frac{1}{s/2} - 1\right)\left(\frac{1}{t/2} - 1\right)\right)^2 = \left(f_{1/2}\left(\frac{s}{2}\right)\right)^2 \\ &\geq \left(f_{1/2}\left(\frac{1}{4}\right)\right)^2 = \left((4-1)^2\right)^2 = 81\,. \end{aligned}$$

Zweite Lösung: (Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel.)

Die Abschätzung folgt aus der bekannten Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel dreier positiver Zahlen

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}\,,$$

die wir viermal anwenden. Dazu schreiben wir

$$\begin{aligned}
p &= \frac{1-a}{a} \cdot \frac{1-b}{b} \cdot \frac{1-c}{c} \cdot \frac{1-d}{d} \\
&= \frac{b+c+d}{a} \cdot \frac{a+c+d}{b} \cdot \frac{a+b+d}{c} \cdot \frac{a+b+c}{d} \\
&= 81 \cdot \frac{\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{d}{a}}{3} \cdot \frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{b}+\frac{d}{b}}{3} \cdot \frac{\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{d}{c}}{3} \cdot \frac{\frac{a}{d}+\frac{b}{d}+\frac{c}{d}}{3} \\
&\geq 81 \cdot \sqrt[3]{\frac{b}{a} \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{d}{a}} \cdot \sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{d}{b}} \cdot \sqrt[3]{\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{d}{c}} \cdot \sqrt[3]{\frac{a}{d} \cdot \frac{b}{d} \cdot \frac{c}{d}} = 81\,.
\end{aligned}$$

Dritte Lösung: (Abschätzung mit Hilfe von Umordnungen.)

Wir beweisen zunächst den folgenden

Hilfssatz: Sind x_1, x_2, y_1 und y_2 vier reelle Zahlen mit $x_1+y_1 = x_2+y_2$ und $|x_1-y_1| \leq |x_2-y_2|$, so gilt $x_1y_1 \geq x_2y_2$.

Der Beweis des Hilfssatzes ergibt sich aus der Abschätzung

$$x_1y_1 = \frac{1}{4}\left((x_1+y_1)^2 - (x_1-y_1)^2\right) \geq \frac{1}{4}\left((x_2+y_2)^2 - (x_2-y_2)^2\right) = x_2y_2\,.$$

Vertauscht man in p zwei beliebige der vier Variablen miteinander, so ändert sich der Wert des Produkts nicht. Wir können also zusätzlich annehmen, dass die Variablen so geordnet sind, dass $a \geq b \geq c \geq d$ gilt. Dann folgt aus dem Hilfssatz

$$\begin{aligned}
&abcd \cdot p = (1-a)\cdot(1-b)\cdot(1-c)\cdot(1-d) \\
&= (b+c+d)\cdot(a+c+d)\cdot(a+b+d)\cdot(a+b+c) \\
&\geq (b+d+d)\cdot(a+c+c)\cdot(a+b+d)\cdot(a+b+c) \text{ (wegen } a-b+2(c-d) \geq a-b \geq 0) \\
&\geq (b+d+d)\cdot(a+c+c)\cdot(b+b+d)\cdot(a+a+c) \text{ (wegen } 2(a-b)+(c-d) \geq c-d \geq 0) \\
&\geq (d+d+d)\cdot(a+c+c)\cdot(b+b+b)\cdot(a+a+c) \text{ (wegen } 3(b-d) \geq b-d \geq 0) \\
&\geq (d+d+d)\cdot(c+c+c)\cdot(b+b+b)\cdot(a+a+a) \text{ (wegen } 3(a-c) \geq a-c \geq 0) \\
&= 81 \cdot abcd
\end{aligned}$$

und damit $p \geq 81$.

Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

Aufgabe 571221 *Insgesamt: 10 Punkte*

Nachweis, dass z ganzzahlig sein muss .... 1 Punkt
Nachweis, dass $z > 0$ sein muss .... 1 Punkt
Nachweis, dass z Teiler von 2017 sein muss .... 2 Punkte
Schluss auf $z = 1$ oder $z = 2017$ aus Primzahleigenschaft von 2017 .... 1 Punkt
Feststellung, dass nur $z = 2017$ möglich ist .... 2 Punkte
Bestimmung der Lösungen des Gleichungssystems im Falle $z = 2017$ .... 3 Punkte

Aufgabe 571222 *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a) .... 3 Punkte
Nachweis, dass es höchstens ein Dreieck der verlangten Art gibt: 2 Punkte
Nachweis, dass es mindestens ein Dreieck der verlangten Art gibt: 1 Punkt
Teil b) .... 3 Punkte
Rückführung auf Teilaufgabe a): 1 Punkt
Begründung, dass es genau sieben erlaubte Dreiecke gibt: 2 Punkte
Teil c) .... 4 Punkte
Rückführung auf Teilaufgabe a): 1 Punkt
Angabe der Anzahl der Möglichkeiten, aus n Punkten genau sechs auszuwählen: 2 Punkte
Korrektes Ergebnis: 1 Punkt

Aufgabe 571223 *Insgesamt: 10 Punkte*

Skizze .... 2 Punkte
Nachweis, dass Viereck BM_aCM_i ein Sehnenviereck ist .... 3 Punkte
Erkenntnis, dass $ABQC$ als Sehnenviereck nachgewiesen werden muss .... 2 Punkte
Nachweis, dass $ABQC$ ein Sehnenviereck ist .... 3 Punkte

Aufgabe 571224 *Insgesamt: 10 Punkte*

Angabe des Minimalwertes und der zugehörigen a, b, c, d .... 1 Punkt
Zielführender Lösungsansatz .... 4 Punkte
Vervollständigung der Lösung durch Beweis von $p \geq 81$ .... 5 Punkte

Beispielhafte Aufteilung der $(4 + 5 = 9)$ Punkte in den Lösungsvorschlägen:

1. Lösung:
Betrachtung der Funktion f_s und Bestimmung ihres Extremwerts .... 4 Punkte
Dreifache Anwendung der Ungleichung (1) zum Beweis von $p \geq 81$ .... 5 Punkte

2. Lösung:
Zielgerichtete Anwendung der AM-GM-Ungleichung für 3 Variablen .... 4 Punkte
Vervollständigung des Beweises von $p \geq 81$ .... 5 Punkte

3. Lösung:
Beobachtung der Symmetrie und Beweis des Hilfssatzes .... 4 Punkte
Anwendung des Hilfssatzes zum Beweis von $p \geq 81$ .... 5 Punkte