Olympiadeklasse 10

57. Mathematik-Olympiade
2. Runde (Regionalrunde)
Lösungen

571021 Lösung *10 Punkte*

Teil a)

Umfüllvorgang	Inhalt A (8)	Inhalt B (5)	Inhalt C (3)
(Anfang)	8	0	0
$A \to B$	3	5	0
$B \to C$	3	2	3
$C \to A$	6	2	0
$B \to C$	6	0	2
$A \to B$	1	5	2
$\mathbf{B \to C}$	**1**	**4**	**3**

Nach dem sechsten Vorgang hat man einen Liter Flüssigkeit im Kanister A und vier Liter im Kanister B.

Teil b)

Umfüllvorgang	Inhalt A (8)	Inhalt B (5)	Inhalt C (3)
(Anfang)	0	5	3
$C \to A$	3	5	0
$B \to C$	3	2	3
$\mathbf{C \to A}$	**6**	2	0
$B \to C$	6	0	2
$A \to B$	1	5	2
$B \to C$	1	4	3
$\mathbf{C \to A}$	**4**	**4**	**0**

Teil c) Um den Anteil an Biodiesel zu ermitteln, betrachten wir die Verteilung des Biodiesels nach den einzelnen Umfüllungen.

Umfüllvorgang	Biodiesel in Litern A	Biodiesel in Litern B	Biodiesel in Litern C
(Anfang)	0	0	3
$C \to A$	3	0	0
$B \to C$	3	0	0
$\mathbf{C \to A}$	**3**	0	0
$B \to C$	3	0	0
$A \to B$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	0
$B \to C$	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$
$\mathbf{C \to A}$	**1**	**2**	0

Die sechs Liter in A nach den ersten drei Umfüllungen bestehen aus drei Litern jeder Sorte, der Bio-Anteil ist also gleich $\frac{1}{2}$. Von diesen sechs Litern landen später ohne weiteres Vermischen vier Liter im Kanister B, der Bio-Anteil ist immer noch gleich $\frac{1}{2}$. Von den ursprünglich drei Litern Bio-Diesel sind zwei Liter in der Mischung B, der restliche Liter ist einer von vier Litern im Kanister A, also ist der Anteil dort gleich $\frac{1}{4}$.

571022 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Die Funktion a hat die Nullstellen 2 und 6. Eine Probe mit beiden Möglichkeiten für $b(x)$ zeigt, dass $b(2) = -\frac{1}{6} \cdot 2^2 + \frac{8}{3} \cdot 2 - \frac{14}{3} = 0$ gilt. Also ist $x_1 = 2$ eine gemeinsame Nullstelle von $a(x)$ und $b(x)$.

Teil b) Der Ansatz $-\frac{1}{6}\,x^2 + \frac{8}{3}\,x - \frac{14}{3} = 0$ geht durch Multiplikation mit -6 äquivalent über in $x^2 - 16\,x + 28 = 0$ mit den beiden Lösungen $x_1 = 8 - \sqrt{64-28} = 2$ (bereits bekannt) und $x_2 = 8 + \sqrt{64-28} = 14$.

Die zweite Nullstelle kann auch nach dem Satz des Vieta über $2 \cdot x_2 = 28$ oder über $2 + x_2 = -(-16)$ bestimmt werden.

Teil c) Die Senkrechte zur x-Achse durch den Scheitelpunkt S_c schneidet die x-Achse bei $x = 6$ und ist Symmetrieachse des Graphen. Wenn $x_1 = 2 = 6 - 4$ eine Nullstelle ist, dann ist auch $x_2 = 6 + 4 = 10$ eine Nullstelle. Wir suchen also eine Funktion mit den Nullstellen 2 und 10, die an der Stelle $x = 6$ den Funktionswert 7 besitzt.

Alle quadratischen Funktionen mit den Nullstellen 2 und 10 können durch

$$c(x) = k \cdot (x-2)\,(x-10)$$

dargestellt werden. Der Faktor k muss nun so gewählt werden, dass $c(6) = 7$ gilt:

$$c(6) = 7 = k \cdot (6-2)(6-10) = k \cdot 4 \cdot (-4) = -16\,k$$

ergibt $k = -\frac{7}{16}$. Die gesuchte Funktionsgleichung ist

$$c(x) = -\frac{7}{16} \cdot (x-2)\,(x-10)$$

oder (ausmultipliziert)

$$c(x) = -\frac{7}{16}\,x^2 + \frac{21}{4}\,x - \frac{35}{4}$$

oder (in Scheitelpunktform) $c(x) = -\frac{7}{16}(x-6)^2 + 7$.

Lösungsvariante: Die Scheitelpunktgleichung von c hat die Form $c(x) = k\,(x-6)^2 + 7$ mit $c(2) = 0$. Einsetzen liefert $k\,(2-6)^2 + 7 = 0$, also $k = -\frac{7}{16}$ und damit $c(x) = -\frac{7}{16}(x-6)^2 + 7$.

Lösungsvariante: Die allgemeine Form der Gleichung einer quadratischen Funktion ist $c(x) = a\,x^2 + b\,x + c$. Aus den vorgegebenen Eigenschaften ergeben sich die Gleichungen

$$c(2) = 0 = 4\,a + 2\,b + c \qquad (1)$$

$$\text{und} \quad c(6) = 7 = 36\,a + 6\,b + c\,. \qquad (2)$$

Die Nullstellen einer quadratischen Funktion liegen symmetrisch zum x-Wert des Scheitelpunktes. Das bedeutet, dass $x_2 = 10$ die zweite Nullstelle der Funktion ist. Daraus folgt die Gleichung

$$c(10) = 0 = 100\,a + 10\,b + c\,. \qquad (3)$$

Die Lösung des Gleichungssystems (1)–(3) führt auf $a = -\frac{7}{16}$, $b = \frac{21}{4}$ und $c = -\frac{35}{4}$. Die gesuchte Funktionsgleichung lautet somit

$$c(x) = -\frac{7}{16}\,x^2 + \frac{21}{4}\,x - \frac{35}{4}\,.$$

Teil d) Da der Scheitelpunkt einer quadratischen Funktion auf deren Symmetrieachse liegt, ist die x-Koordinate des Scheitelpunkts das arithmetische Mittel der beiden Nullstellen dieser quadratischen Funktion. Der Scheitelpunkt des Graphen von a ist somit $S_a\left(\frac{6+2}{2},\, a\left(\frac{6+2}{2}\right)\right) = (4,8)$ und der Scheitelpunkt des Graphen von b ist $S_b\left(\frac{14+2}{2},\, b\left(\frac{14+2}{2}\right)\right) = (8,6)$. Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{S_aS_b}$ hat dann die Koordinaten $x = \frac{4+8}{2} = 6$, $y = \frac{8+6}{2} = 7$ und ist somit der Punkt S_c.

Lösungsvariante: Aus der Scheitelpunktform $a(x) = -2\,(x-4)^2 + 8$ kann $S_a(4,8)$ unmittelbar abgelesen werden, aus der Scheitelpunktform $b(x) = -\frac{1}{6}\,(x-8)^2 + 6$ ergibt sich $S_b(8,6)$.

Die Längen der Strecken $\overline{S_aS_c}$ bzw. $\overline{S_bS_c}$ lassen sich mit Hilfe des Satzes des Pythagoras zu

$$\begin{aligned} |S_aS_c| &= \left|\sqrt{(6-4)^2 + (7-8)^2}\right| = \sqrt{5} \\ \text{bzw.}\quad |S_bS_c| &= \left|\sqrt{(6-8)^2 + (7-6)^2}\right| = \sqrt{5} \end{aligned}$$

berechnen.

Um nachzuweisen, dass S_c auch auf der Strecke $\overline{S_aS_b}$ liegt, kann man die Gleichung der linearen Funktion aufstellen, deren Graph durch S_a und S_b verläuft, und überprüfen, ob der Punkt S_c auf dem Graphen der Funktion liegt. Die Gleichung der Funktion lautet $f(x) = -\frac{1}{2}\,x + 10$ und Einsetzen der Koordinaten von S_c zeigt, dass S_c in der Tat auf dem Graphen dieser Funktion liegt.

571023 Lösung — *10 Punkte*

Teil a) Das Paar $(5,7)$ ist nicht gut, da zum Beispiel $\frac{1}{5} = 0{,}2\overline{0}$ und $\frac{2}{7} = 0{,}\overline{285714}$ in der ersten Nachkommastelle übereinstimmen.

Vorüberlegung für b) und c):

(1) Wenn eine der Zahlen a und b größer ist als 9, dann ist das Paar (a,b) nicht gut.

Ist zum Beispiel $a > 9$, dann gilt $\frac{1}{a} \leq 0{,}1$ und folglich ändert sich die erste Nachkommastelle bei Addition von $\frac{1}{a}$ höchstens um 1.

Andererseits gilt $\frac{a-1}{a} \geq 0{,}9$.

Hieraus folgt, dass jede der Ziffern $1, 2, \ldots, 9$ als erste Nachkommastelle von einem $\frac{i}{a}$ (mit $1 \leq i < a$) vorkommt; insbesondere auch die erste Nachkommastelle von $\frac{b-1}{b}$.

Teil b) b kann keine Zahl sein, für die eine der Zahlen $\frac{1}{b}, \frac{2}{b}, \ldots, \frac{b-1}{b}$ ein endlicher Dezimalbruch ist, da die Nachkommastellen dieser Zahl wie bei $\frac{1}{2} = 0{,}5\overline{0}$ irgendwann null betragen. Daraus folgt, dass b keinen der Werte 2, 4, 5, 6 oder 8 annehmen kann.

Zu untersuchen sind für b also nur die Zahlen 3, 7 und 9.

Das Paar $(2,3)$ ist gut, da weder $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ noch $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{3}$ gemeinsame Nachkommastellen haben. Das Paar $(2,7)$ ist nicht gut, da $\frac{4}{7} = 0{,}\overline{571428}$ mit $\frac{1}{2} = 0{,}5\overline{0}$ in der ersten Nachkommastelle übereinstimmt. Auch das Paar $(2,9)$ ist nicht gut wegen $\frac{1}{2} = 0{,}5$ und $\frac{5}{9} = 0{,}\overline{5}$.

Damit ist $(2,3)$ das einzige gute Paar mit $a = 2$.

Teil c)

(2) Sind a und b beide in der Menge $\{2, 4, 6, 7, 8, 9\}$ enthalten, dann ist das Paar (a, b) nicht gut.

In diesem Fall gibt es ein i mit $1 \leq i < a$, für welches die erste Nachkommastelle von $\frac{i}{a}$ gleich 5 ist, denn es gilt

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = 0{,}5\overline{0}\,,$$
$$\frac{4}{7} = 0{,}\overline{571428}\,,$$
$$\frac{5}{9} = 0{,}\overline{5}\,.$$

Da dies entsprechend für b gilt, ist das Paar (a, b) nicht gut.

(3) Sind a und b beide in der Menge $\{3, 5, 6, 8, 9\}$ enthalten, dann ist das Paar (a, b) nicht gut.

In diesem Fall gibt es ein i mit $1 \leq i < a$, für welches die erste Nachkommastelle von $\frac{i}{a}$ gleich 6 ist, denn es gilt

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = 0{,}\overline{6}\,,$$
$$\frac{3}{5} = 0{,}6\overline{0}\,,$$
$$\frac{5}{8} = 0{,}625\overline{0}\,.$$

Da dies entsprechend für b gilt, ist das Paar (a, b) nicht gut.

(4) Sind a und b beide in der Menge $\{2, 4, 5, 6, 8\}$ enthalten, dann ist das Paar (a, b) nicht gut.

In diesem Fall gibt es ein i mit $1 \leq i < a$, für welches die zweite Nachkommastelle von $\frac{i}{a}$ gleich 0 ist, denn es gilt

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = 0{,}5\overline{0}\,,$$
$$\frac{1}{5} = 0{,}2\overline{0}\,.$$

Da dies entsprechend für b gilt, ist das Paar (a, b) nicht gut.

(5) Sind a und b beide in der Menge $\{5, 7\}$ enthalten, dann ist das Paar (a, b) nicht gut.

In diesem Fall gibt es ein i mit $1 \leq i < a$, für welches die erste Nachkommastelle von $\frac{i}{a}$ gleich 2 ist, denn es gilt

$$\frac{1}{5} = 0{,}2\overline{0}\,,$$
$$\frac{2}{7} = 0{,}\overline{285714}\,.$$

Da dies entsprechend für b gilt, ist das Paar (a, b) nicht gut.

Angenommen, (a, b) ist ein gutes Paar. Dann folgt aus der Vorüberlegung, dass $a, b \leq 9$ gelten muss. Wegen (3), (4) und (5) ist keine der beiden Zahlen eine 5. Wegen (2) ist dann eine der Zahlen a oder b eine 3, und wegen (3) ist die andere Zahl eine 2, 4 oder 7.

Es bleiben also nur noch die Paare $(a,b) \in \{(2,3),(3,2),(3,4),(4,3),(3,7),(7,3)\}$ zu betrachten. Diese Paare sind aber wirklich alle gut, weil einerseits $\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}$ und $\frac{2}{3} = 0{,}\overline{6}$ gilt, andererseits aber keine Nachkommastelle von

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} = \frac{2}{4} &= 0{,}5\overline{0}\,,\\
\frac{1}{4} &= 0{,}25\overline{0}\,,\\
\frac{3}{4} &= 0{,}75\overline{0}\,,\\
\frac{1}{7} &= 0{,}\overline{142857}\,,\\
\frac{2}{7} &= 0{,}\overline{285714}\,,\\
\frac{3}{7} &= 0{,}\overline{428571}\,,\\
\frac{4}{7} &= 0{,}\overline{571428}\,,\\
\frac{5}{7} &= 0{,}\overline{714285}\,,\\
\frac{6}{7} &= 0{,}\overline{857142}
\end{aligned}$$

gleich 3 oder gleich 6 ist.

Lösungsvariante: (Lösung durch systematisches Untersuchen)

Wie in der *Vorüberlegung für b) und c)* der vorigen Lösung folgern wir, dass sowohl a als auch b einstellig sein müssen. Da zusätzlich Paare (a,a) nicht gut sein können und mit dem Paar (a,b) auch stets das Paar (b,a) gut ist, betrachten wir in der folgenden Tabelle nun nur die Möglichkeiten (a,b) mit $2 \le a < b \le 9$.

Für $5 \le n < 10$ folgt $0{,}2 \ge \frac{1}{n} > 0{,}1$ und somit $0{,}8 \le \frac{n-1}{n} < 0{,}9$. Die Brüche $\frac{n-1}{n}$ stimmen also in der ersten Nachkommastelle überein, weswegen bei guten Paaren (a,b) a und b nicht beide größer als 4 sein können. Die Tabelle enthält daher nur die Fälle mit $a = 2$, $a = 3$ und $a = 4$.

Mit $z_i(r)$ bezeichnen wir in der Tabelle die Ziffer von r an der i-ten Nachkommastelle.

b	$a=2$	$a=3$	$a=4$
9	$z_1(\frac{1}{2}) = z_1(\frac{5}{9})$	$\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$	$z_1(\frac{1}{4}) = z_1(\frac{2}{9})$
8	$z_4(\frac{1}{2}) = z_4(\frac{1}{8})$	$z_1(\frac{1}{3}) = z_1(\frac{3}{8})$	$z_4(\frac{1}{4}) = z_4(\frac{1}{8})$
7	$z_1(\frac{1}{2}) = z_1(\frac{4}{7})$	gut	$z_1(\frac{1}{4}) = z_1(\frac{2}{7})$
6	$\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$	$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$	$\frac{2}{4} = \frac{3}{6}$
5	$z_2(\frac{1}{2}) = z_2(\frac{1}{5})$	$z_1(\frac{2}{3}) = z_1(\frac{3}{5})$	$z_1(\frac{1}{4}) = z_1(\frac{1}{5})$
4	$z_3(\frac{1}{2}) = z_3(\frac{1}{4})$	gut	
3	gut		

Da wir für „gut“ noch keine explizite Begründung in der Tabelle angegeben haben, liefern wir sie nach:

i	$i/7$	$i/4$	$i/3$	$i/2$
1	$0{,}\overline{142857}$	0,25	$0{,}\overline{3}$	0,5
2	$0{,}\overline{285714}$	0,5	$0{,}\overline{6}$	
3	$0{,}\overline{428571}$	0,75		
4	$0{,}\overline{571428}$			
5	$0{,}\overline{714285}$			
6	$0{,}\overline{857142}$			

Bei den betrachteten Halben, Vierteln und Siebteln ganzer Zahlen kommen nach dem Komma lediglich Ziffern aus $\{0, 1, 2, 4, 5, 7, 8\}$, bei den betrachteten Dritteln lediglich Ziffern aus $\{3, 6\}$, wie aus der zweiten Tabelle ersichtlich ist. Da diese beiden Mengen disjunkt sind, bildet 3 mit 2, 4 und 7 jeweils gute Paare.

Daher

a) ist das Paar $(5, 7)$ nicht gut,

b) ist das Paar $(a, b) = (2, 3)$ das einzige gute Paar mit $a = 2$ und

c) sind die Paare $(3, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(3, 7)$ und $(7, 3)$ alle guten Paare.

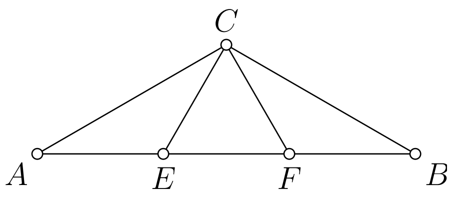
<u>571024 Lösung</u> *10 Punkte*

Vorüberlegung zu beiden Teilen:

Die Dreiecke AEC und FBC sind gleichschenklig, da bei ihnen eine Mittelsenkrechte mit der parallelen Höhe zusammenfällt. Außerdem sind sie kongruent nach (wsw), da sie laut Aufgabenstellung eine gleich lange Basis und gleich große Basiswinkel haben. Das Dreieck EFC ist damit gleichschenklig, seine Schenkel $\overline{EC}$ und $\overline{FC}$ sind gleich lang und seine Innenwinkel bei E und F als Basiswinkel damit spitz.

Die Außenwinkel der Dreiecke AEC und FBC bei E und F haben nach dem Außenwinkelsatz eine Größe von $2\,\alpha < 90°$, sind damit spitz und folglich hat das Dreieck EFC sie als Innenwinkel. Insbesondere liegen A, E, F und B in dieser Reihenfolge auf der Basis des Dreiecks ABC.

Teil a)



Nach den Vorüberlegungen hat Dreieck EFC damit einen Basiswinkel von 60°, ist also gleichseitig.

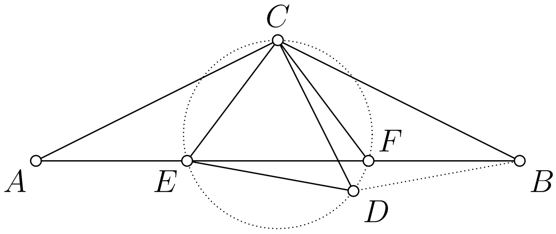
Im Teildreieck AEC gilt $|AE| = |EC|$.

Im Teildreieck EFC gilt $|EC| = |EF| = |FC|$.

Im Teildreieck FBC gilt $|FC| = |FB|$.

Aus der Verknüpfung dieser Gleichungen folgt die Behauptung.

Teil b)



Sei D derjenige Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{EC}$ mit dem Umkreis des Dreiecks EFC, welcher auf derselben Seite der Geraden EC liegt wie B.

Da die Spiegelung des Dreiecks ABC an seiner Basismittelsenkrechten genau A und B vertauscht, gehen nach Definition von E und F auch diese ineinander über und es genügt zu zeigen, dass D von E, B und C gleichen Abstand hat. Außerdem folgt $|CE| = |CF|$.

Laut Konstruktion von D liegen E und C auf einem gemeinsamen Kreis um D. Nach der Vorüberlegung hat Winkel $\sphericalangle CFE$ eine Größe von 2α und F liegt auf derselben Seite der Geraden CE wie B und D.

Nach dem Peripheriewinkelsatz über der Sehne $\overline{CE}$ an k gilt damit auch $|\sphericalangle CDE| = 2\,\alpha$.

Nach der Umkehrung des Peripherie-Zentriwinkelsatzes liegt B auf dem Kreis um D durch E (und C), weil $|\sphericalangle CDE| = 2\,\alpha = 2\;|\sphericalangle CBE|$ gilt.

Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

Aufgabe 571021 — *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a) .... 2 Punkte

Ergebnis (in einem Kanister ein Liter und in einem anderen vier Liter Flüssigkeit): 1 Punkt

Anzahl der Umfüllungen ist kleiner als acht: 1 Punkt

Teil b) .... 2 Punkte

Teil c) .... 6 Punkte

Angabe des Anteils an Biodiesel in A nach drei Umfüllungen: 2 Punkte

Angabe der Anteile in A und B nach sieben Umfüllungen: 4 Punkte

Aufgabe 571022 — *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a) .... 1 Punkt

Teil b) .... 1 Punkt

Teil c) .... 4 Punkte

Teil d) .... 4 Punkte

Aufgabe 571023 — *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a) .... 1 Punkt

Teil b) .... 5 Punkte

Ausschluss der Zahlen 2, 4, 5, 6 und 8 für b: 1 Punkt

Richtige Untersuchung der Zahlen 3, 7 und 9: 2 Punkte

Erkenntnis, dass b nicht größer als 9 sein kann, und Angabe des Ergebnisses: 2 Punkte

Teil c) .... 4 Punkte

Finden der restlichen Paare: 2 Punkte

Systematische Herleitung bzw. Begründung, dass es keine weiteren Paare gibt: 2 Punkte

Anmerkung: Es gibt verschiedene Argumente, mit denen man eine größere Anzahl von Paaren aus der weiteren Betrachtung ausschließen kann, welche zum Teil in den Lösungen schon genannt wurden. Bei guten Paaren (a, b)

- müssen beide Zahlen einstellig sein, da bei mehrstelligen Zahlen n die betrachteten Brüche $\frac{i}{n}$ an der ersten Nachkommastelle alle Ziffern durchlaufen,
- muss eine der beiden Zahlen teilerfremd zu 10 sein, weil es sonst im betrachteten Bereich endliche Dezimalbrüche $\frac{i}{a}$ und $\frac{j}{b}$ gibt,
- müssen die beiden Zahlen teilerfremd zueinander sein, weil bei einem gemeinsamen Teiler t stets $\frac{a/t}{a} = \frac{b/t}{b}$ gilt,
- muss eine der beiden Zahlen kleiner als 5 sein, weil sonst $\frac{a-1}{a}$ und $\frac{b-1}{b}$ als erste Ziffer eine 8 haben oder eine der beiden Zahlen nicht einstellig ist,
- kann man sich auf $a > b$ beschränken, da (a, a) nicht gut ist und mit (a, b) auch (b, a) gut ist, ...

Bei systematischen Lösungen mit nachträglicher Beantwortung der Teilaufgaben etwa gibt es insgesamt sechs Punkte für die korrekte Behandlung aller nicht guten Paare (a, b) – davon einen Punkt an der Stelle, wo (5,7) korrekt untersucht wird, einen Punkt für eine obere Schranke für a und b (erstgenanntes Argument) und bis zu drei Punkte für weitere Argumente, die viele weitere Paare ausschließen. Die restlichen Punkte für die Behandlung von nicht guten Paaren gibt es für die Einzelfallbehandlung der nicht guten Paare, die nach diesen Argumenten noch übrig bleiben.

In der vorliegenden Variante mit systematischer Abarbeitung gäbe es also einen Punkt auf das Argument für Einstelligkeit von a und b, einen Punkt für die Einschränkung $a < b$, zwei Punkte für die Einschränkung $a < 5$, da man damit sowohl viele Paare los wird als auch (5,7) behandelt, und die restlichen zwei Punkte für die Vollständigkeit der Tabelle und die Korrektheit der Einträge in der Tabelle.

Für die korrekte Behandlung aller guten Paare verbleiben also 4 Punkte, davon einer für die begründete Nennung von (2,3), zwei Punkte für die Nennung aller (weiteren) guten Paare und ein Punkt für die korrekte Begründung, dass alle genannten Paare gut sind.

Aufgabe 571024 *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a) .... 3 Punkte

Hier sind sehr vielfältige Varianten möglich (vgl. 570923). Wurde angefangen, hier etwas zu tun, gibt es einen Punkt, alle drei nur, wenn es fehlerfrei ist. Bei kleinen Ungenauigkeiten gibt es also zwei Punkte.

Teil b) .... 7 Punkte

Definition des Punktes D oder anderer geeigneter Hilfspunkte: 1 Punkt

Es ist zu beweisen, dass es einen Punkt gibt, der zu E, C und B den gleichen Abstand hat und der auf dem Umkreis des Dreiecks EFC liegt. Gibt man nur eine Forderung auf, kann man einen Kandidaten für den Punkt mehr oder weniger eindeutig konstruieren und muss für diesen zeigen, dass die aufgegebene Forderung auch erfüllt ist. Infolgedessen gibt es viele Ansätze. Der Ansatzpunkt wird vergeben, wenn ein sinnvoller Ansatz erkennbar ist.

Nachweis ein Umkreismittelpunkt auf k für skizzierte oder beschriebene Lage: 3 Punkte

Einen Punkt gibt es, wenn angefangen wurde, sinnvolle Beziehungen zu beobachten; zwei, wenn man dicht am Ziel ist, und drei nur bei bzgl. Skizze korrekter Begründung aller Gleichungen und wenn diese für die Lage wie in der Skizze (oder den getroffenen Annahmen für Lagebeziehungen) die Aussage zeigen.

Notwendige Diskussionen zu Lagebeziehungen auch korrekt: 2 Punkte

In der hier angegebenen Skizze kann etwa D auf dem Kreis auf die andere Seite von F rutschen, was für den gezeigten Beweis zwar egal, für Beweise, die etwa $|\sphericalangle DEF|$ verwenden, aber ärgerlich ist. Nur wenn die (implizit) verwendeten Lagebeziehungen tatsächlich auch gezeigt wurden oder wenn Beweise für alle möglichen Fälle vollständig sind, gibt es volle Punktzahl. Wir empfehlen, einen Punkt abzuziehen, wenn nur die Diskussion der richtigen Lage fehlt. In der Musterlösung wäre das die Lage von D, F und B auf der gleichen Seite von EC. Stellt sich heraus, dass sogar ein Fall dadurch unter den Tisch fiel, sollten zwei Punkte fehlen. Klappt der Beweis gar nur für endlich viele Werte von α, dann kann es nur noch den Ansatzpunkt geben; es fehlen dann bei Teil b) sechs Punkte der sieben Punkte.

Nachweis zweiter Umkreismittelpunkt auf k: 1 Punkt

In der Regel ist das der Punkt für das Symmetrieargument. Falls keine Symmetriebetrachtung genutzt wurde, gibt es auf den Nachweis, dass der zweite Umkreismittelpunkt auch auf k liegt, trotzdem nur einen Punkt. Nur wenn beide Nachweise vollständig sind, gibt es den letzten Punkt, ansonsten wird nur einer der beiden Nachweise bepunktet. Sind sie unterschiedlich gut, dann wird der bessere bepunktet.