Olympiadeklasse **9**

57. Mathematik-Olympiade
2. Runde (Regionalrunde)
Lösungen

570921 Lösung *10 Punkte*

Teil a)

Umfüllvorgang	Inhalt A (8)	Inhalt B (5)	Inhalt C (3)
(Anfang)	8	0	0
$A \to B$	3	5	0
$B \to C$	3	2	3
$C \to A$	6	2	0
$B \to C$	6	0	2
$A \to B$	1	5	2
$\mathbf{B} \to \mathbf{C}$	**1**	**4**	**3**

Nach dem sechsten Vorgang hat man einen Liter Flüssigkeit im Kanister A und vier Liter im Kanister B.

Teil b)

Umfüllvorgang	Inhalt A (8)	Inhalt B (5)	Inhalt C (3)
(Anfang)	0	5	3
$C \to A$	3	5	0
$B \to C$	3	2	3
$\mathbf{C} \to \mathbf{A}$	**6**	2	0
$B \to C$	6	0	2
$A \to B$	1	5	2
$B \to C$	1	4	3
$\mathbf{C} \to \mathbf{A}$	**4**	**4**	**0**

Teil c) Um den Anteil an Biodiesel zu ermitteln, betrachten wir die Verteilung des Biodiesels nach den einzelnen Umfüllungen.

Umfüllvorgang	Biodiesel in Litern A	Biodiesel in Litern B	Biodiesel in Litern C
(Anfang)	0	0	3
$C \to A$	3	0	0
$B \to C$	3	0	0
$\mathbf{C} \to \mathbf{A}$	**3**	0	0
$B \to C$	3	0	0
$A \to B$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	0
$B \to C$	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$
$\mathbf{C} \to \mathbf{A}$	**1**	**2**	0

Die sechs Liter in A nach den ersten drei Umfüllungen bestehen aus drei Litern jeder Sorte, der Bio-Anteil ist also gleich $\frac{1}{2}$. Von diesen sechs Litern landen später ohne weiteres Vermischen vier Liter im Kanister B, der Bio-Anteil ist immer noch gleich $\frac{1}{2}$. Von den ursprünglich drei Litern Bio-Diesel sind zwei Liter in der Mischung B, der restliche Liter ist einer von vier Litern im Kanister A, also ist der Anteil dort gleich $\frac{1}{4}$.

570922 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Siehe Teil e).

Teil b) Die Funktionen haben wegen $a(2) = b(2) = 0$ die gemeinsame Nullstelle $x = 2$.

Teil c) Es gilt $b(x) = 0$ genau dann, wenn $|x - 8| = 6$ ist, also für $x - 8 = 6$ oder für $x - 8 = -6$. Der zweite Fall führt zu der bereits bekannten Nullstelle $x = 2$, der erste Fall führt zu $x = 14$.

Teil d) Solche reellen Zahlen sind $p = -\frac{7}{4}$, $q = 6$ und $r = 7$, denn für $c(x)$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} c(2) &= -\frac{7}{4} \cdot |2-6| + 7 = -\frac{7}{4} \cdot 4 + 7 = -7 + 7 = 0\,, \\ c(6) &= -\frac{7}{4} \cdot |6-6| + 7 = -\frac{7}{4} \cdot 0 + 7 = 7\,, \\ c(x) &= -\frac{7}{4} \cdot |x-6| + 7 \le 7\,, \end{aligned}$$

wobei in der letzten Abschätzung $-\frac{7}{4} \cdot |x - 6| \le 0$ verwendet wurde, da $-\frac{7}{4}$ negativ und $|x - 6|$ als Betrag nie negativ ist.

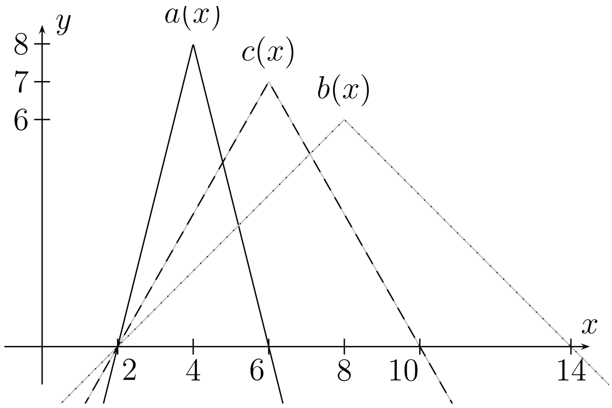
Anmerkung: Man kann die reellen Zahlen auch ermitteln, indem man sie glücklich errät, weswegen die vorstehende Lösung von Teil d) trotz fehlender expliziter Herleitung vollständig ist. Möglichkeiten, die vorstehenden Werte herzuleiten, wären die folgenden:

- Wäre $p = 0$, so wäre $c(x)$ konstant, was nicht sein kann, da c unter anderem die Werte 0 und 7 annimmt. Damit c einen größten Wert annehmen kann, muss $p < 0$ gelten (da sonst c beliebig große Werte annimmt); den größten Wert nimmt c dann für $x = q$ an, und zwar ist der Wert dort gleich r. Man erhält also direkt $q = 6$ und $r = 7$. Wegen $c(2) = 0$ folgt $p \cdot |2 - 6| + 7 = 0$ und somit $p = -\frac{7}{4}$.
- Auf Grund der Symmetrieeigenschaften der Betragsfunktion muss die zweite Nullstelle bei $x = 10$ liegen. Die Lösung ergibt sich daher wegen $c(x) = p \cdot |x - q| + r$ aus folgendem Gleichungssystem:

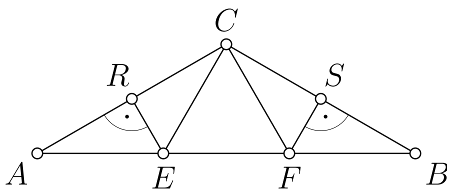
$$\begin{aligned} c(2) &= 0 = p \cdot |2-q| + r\,, && (1) \\ c(6) &= 7 = p \cdot |6-q| + r\,, && (2) \\ c(10) &= 0 = p \cdot |10-q| + r\,. && (3) \end{aligned}$$

  Gleichsetzen von (1) und (3) ergibt $p \cdot |2 - q| + r = p \cdot |10 - q| + r$. Nach Subtraktion von r auf beiden Seiten erhält man $p \cdot |2 - q| = p \cdot |10 - q|$ und nach Division durch p (p muss ungleich null sein, da $c(x)$ sonst eine konstante Funktion wäre) folgt $|2 - q| = |10 - q|$. q hat also von 10 und 2 den gleichen Abstand, liegt also in der Mitte und es folgt $q = 6$. Einsetzen in (2) ergibt $7 = p \cdot |6 - 6| + r$ und damit $r = 7$. Anschließendes Einsetzen in (3) führt zu $0 = p \cdot |4| + 7$ und damit zu $p = -\frac{7}{4}$.

Teil e)



570923 Lösung *10 Punkte*



Der Mittelpunkt der Seite $\overline{AC}$ sei R und der Mittelpunkt der Seite $\overline{BC}$ sei S.

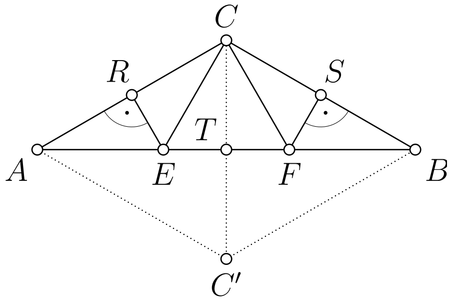
In den Dreiecken AEC und BCF ist nach Konstruktion die Mittelsenkrechte zu $\overline{AC}$ bzw. $\overline{BC}$ gleichzeitig die Höhe. Damit sind die Dreiecke AEC und CFB gleichschenklig mit den Basiswinkelgrößen 30° und nach Aufgabenstellung gleich langen Basen $\overline{AC}$ und $\overline{CB}$ – also nach (wsw) kongruent. Daher sind ihre Schenkel alle gleich lang und es gilt $|EA| = |EC| = |CF| = |FB|$. Das Dreieck EFC ist also gleichschenklig.

Nach dem Außenwinkelsatz zum Außenwinkel $\sphericalangle CFA$ an das Dreieck FBC ist ein Basiswinkel des Dreiecks EFC genau 60° groß (Basiswinkel sind spitze Winkel, was absichert, dass $\sphericalangle CFA$ tatsächlich Innenwinkel des Dreiecks EFC ist). Damit ist auch die Größe der weiteren Innenwinkel gleich 60° und das Dreieck ist sogar gleichseitig. Es gilt also $|EF| = |EC|$.

Aus der Verknüpfung der Gleichungen folgt die Behauptung.

Lösungsvariante: Laut Innenwinkelsatz im Dreieck AER gilt $|\sphericalangle REA| = 60°$. Ebenso gilt $|\sphericalangle CFA| = 60°$ (Nachweis siehe erster Lösungsvorschlag). Nach der Umkehrung des Stufenwinkelsatzes ist die Gerade RE parallel zur Geraden CF. Nach dem Hauptähnlichkeitssatz ist das Dreieck AER ähnlich zum Dreieck AFC. Da R der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AC}$ ist, gilt: $|AR| : |RC| = 1 : 1$. Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke gilt dann auch $|AE| : |EF| = 1 : 1$ und somit $|AE| = |EF|$. Analog ergibt sich aus der Ähnlichkeit der Dreiecke FBS und EBC die Gleichheit $|EF| = |FB|$ und somit die Behauptung $|AE| = |EF| = |FB|$.

Weitere Lösungsvariante:



Der Mittelpunkt der Seite $\overline{AC}$ sei R, der Mittelpunkt der Seite $\overline{BC}$ sei S und der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$ sei T.

Der Punkt C wird an der Geraden AB gespiegelt und man erhält den Punkt C'. Die zueinander kongruenten Dreiecke $AC'C$ und $C'BC$ sind gleichseitig, denn es gilt $|AC| = |AC'|$ bzw. $|BC| = |BC'|$ und die Größe des Winkels an der Spitze beträgt jeweils 60°. Im Dreieck $AC'C$ ist $\overline{RC'}$ laut Aufgabenstellung die Mittelsenkrechte und auch $\overline{AT}$ ist auf Grund der Spiegelung Mittelsenkrechte. Beide Strecken sind auch Seitenhalbierende in diesem Dreieck und werden im Punkt E im Verhältnis $2:1$ geteilt. Damit gilt:

$$|AE| : |ET| = 2 : 1 \quad \text{bzw.} \quad |AE| = 2\,|ET|\,. \tag{1}$$

Wegen der Kongruenz der Dreiecke $AC'C$ und $C'BC$ gilt

$$|AE| = |FB|\,,\ |ET| = |TF| \ \text{ und } \ |ET| + |TF| = |EF|\,. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt somit die Gleichungskette

$$|FB| = |AE| = 2\,|ET| = |ET| + |TF| = |EF|\,,$$

also auch die Behauptung.

<u>570924 Lösung</u> *10 Punkte*

Teil a) Das Paar $(5,7)$ ist nicht gut, da zum Beispiel $\frac{1}{5} = 0{,}2\overline{0}$ und $\frac{2}{7} = 0{,}\overline{285714}$ in der ersten Nachkommastelle übereinstimmen.

Vorüberlegung für b) und c):

(1) Wenn eine der Zahlen a und b größer ist als 9, dann ist das Paar (a,b) nicht gut.

Ist zum Beispiel $a > 9$, dann gilt $\frac{1}{a} \le 0{,}1$ und folglich ändert sich die erste Nachkommastelle bei Addition von $\frac{1}{a}$ höchstens um 1.

Andererseits gilt $\frac{a-1}{a} \ge 0{,}9$.

Hieraus folgt, dass jede der Ziffern $1, 2, \ldots, 9$ als erste Nachkommastelle von einem $\frac{i}{a}$ (mit $1 \le i < a$) vorkommt; insbesondere auch die erste Nachkommastelle von $\frac{b-1}{b}$.

Teil b) b kann keine Zahl sein, für die eine der Zahlen $\frac{1}{b}, \frac{2}{b}, \ldots, \frac{b-1}{b}$ ein endlicher Dezimalbruch ist, da die Nachkommastellen dieser Zahl wie bei $\frac{1}{2} = 0{,}5\overline{0}$ irgendwann null betragen. Daraus folgt, dass b keinen der Werte 2, 4, 5, 6 oder 8 annehmen kann.

Zu untersuchen sind für b also nur die Zahlen 3, 7 und 9.

Das Paar $(2,3)$ ist gut, da weder $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ noch $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{3}$ gemeinsame Nachkommastellen haben. Das Paar $(2,7)$ ist nicht gut, da $\frac{4}{7} = 0{,}\overline{571428}$ mit $\frac{1}{2} = 0{,}5\overline{0}$ in der ersten Nachkommastelle übereinstimmt. Auch das Paar $(2,9)$ ist nicht gut wegen $\frac{1}{2} = 0{,}5$ und $\frac{5}{9} = 0{,}\overline{5}$.

Damit ist $(2,3)$ das einzige gute Paar mit $a = 2$.

Teil c)

(2) Sind a und b beide in der Menge $\{2,4,6,7,8,9\}$ enthalten, dann ist das Paar (a,b) nicht gut.

In diesem Fall gibt es ein i mit $1 \leq i < a$, für welches die erste Nachkommastelle von $\frac{i}{a}$ gleich 5 ist, denn es gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} &= 0{,}5\overline{0}\,,\\ \frac{4}{7} &= 0{,}\overline{571428}\,,\\ \frac{5}{9} &= 0{,}\overline{5}\,.\end{aligned}$$

Da dies entsprechend für b gilt, ist das Paar (a,b) nicht gut.

(3) Sind a und b beide in der Menge $\{3,5,6,8,9\}$ enthalten, dann ist das Paar (a,b) nicht gut.

In diesem Fall gibt es ein i mit $1 \leq i < a$, für welches die erste Nachkommastelle von $\frac{i}{a}$ gleich 6 ist, denn es gilt

$$\begin{aligned}\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} &= 0{,}\overline{6}\,,\\ \frac{3}{5} &= 0{,}6\overline{0}\,,\\ \frac{5}{8} &= 0{,}625\overline{0}\,.\end{aligned}$$

Da dies entsprechend für b gilt, ist das Paar (a,b) nicht gut.

(4) Sind a und b beide in der Menge $\{2,4,5,6,8\}$ enthalten, dann ist das Paar (a,b) nicht gut.

In diesem Fall gibt es ein i mit $1 \leq i < a$, für welches die zweite Nachkommastelle von $\frac{i}{a}$ gleich 0 ist, denn es gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} &= 0{,}5\overline{0}\,,\\ \frac{1}{5} &= 0{,}2\overline{0}\,.\end{aligned}$$

Da dies entsprechend für b gilt, ist das Paar (a,b) nicht gut.

(5) Sind a und b beide in der Menge $\{5,7\}$ enthalten, dann ist das Paar (a,b) nicht gut.

In diesem Fall gibt es ein i mit $1 \leq i < a$, für welches die erste Nachkommastelle von $\frac{i}{a}$ gleich 2 ist, denn es gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{5} &= 0{,}2\overline{0}\,,\\ \frac{2}{7} &= 0{,}\overline{285714}\,.\end{aligned}$$

Da dies entsprechend für b gilt, ist das Paar (a,b) nicht gut.

Angenommen, (a,b) ist ein gutes Paar. Dann folgt aus der Vorüberlegung, dass $a,b \leq 9$ gelten muss. Wegen (3), (4) und (5) ist keine der beiden Zahlen eine 5. Wegen (2) ist dann eine der Zahlen a oder b eine 3, und wegen (3) ist die andere Zahl eine 2, 4 oder 7.

Es bleiben also nur noch die Paare $(a,b) \in \{(2,3),(3,2),(3,4),(4,3),(3,7),(7,3)\}$ zu betrachten. Diese Paare sind aber wirklich alle gut, weil einerseits $\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}$ und $\frac{2}{3} = 0{,}\overline{6}$ gilt, andererseits aber keine Nachkommastelle von

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} = \frac{2}{4} &= 0{,}5\overline{0}\,, \\
\frac{1}{4} &= 0{,}25\overline{0}\,, \\
\frac{3}{4} &= 0{,}75\overline{0}\,, \\
\frac{1}{7} &= 0{,}\overline{142857}\,, \\
\frac{2}{7} &= 0{,}\overline{285714}\,, \\
\frac{3}{7} &= 0{,}\overline{428571}\,, \\
\frac{4}{7} &= 0{,}\overline{571428}\,, \\
\frac{5}{7} &= 0{,}\overline{714285}\,, \\
\frac{6}{7} &= 0{,}\overline{857142}
\end{aligned}$$

gleich 3 oder gleich 6 ist.

Lösungsvariante: (Lösung durch systematisches Untersuchen)

Wie in der *Vorüberlegung für b) und c)* der vorigen Lösung folgern wir, dass sowohl a als auch b einstellig sein müssen. Da zusätzlich Paare (a,a) nicht gut sein können und mit dem Paar (a,b) auch stets das Paar (b,a) gut ist, betrachten wir in der folgenden Tabelle nun nur die Möglichkeiten (a,b) mit $2 \leq a < b \leq 9$.

Für $5 \leq n < 10$ folgt $0{,}2 \geq \frac{1}{n} > 0{,}1$ und somit $0{,}8 \leq \frac{n-1}{n} < 0{,}9$. Die Brüche $\frac{n-1}{n}$ stimmen also in der ersten Nachkommastelle überein, weswegen bei guten Paaren (a,b) a und b nicht beide größer als 4 sein können. Die Tabelle enthält daher nur die Fälle mit $a = 2$, $a = 3$ und $a = 4$.

Mit $z_i(r)$ bezeichnen wir in der Tabelle die Ziffer von r an der i-ten Nachkommastelle.

b	$a = 2$	$a = 3$	$a = 4$
9	$z_1(\frac{1}{2}) = z_1(\frac{5}{9})$	$\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$	$z_1(\frac{1}{4}) = z_1(\frac{2}{9})$
8	$z_4(\frac{1}{2}) = z_4(\frac{1}{8})$	$z_1(\frac{1}{3}) = z_1(\frac{3}{8})$	$z_4(\frac{1}{4}) = z_4(\frac{1}{8})$
7	$z_1(\frac{1}{2}) = z_1(\frac{4}{7})$	gut	$z_1(\frac{1}{4}) = z_1(\frac{2}{7})$
6	$\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$	$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$	$\frac{2}{4} = \frac{3}{6}$
5	$z_2(\frac{1}{2}) = z_2(\frac{1}{5})$	$z_1(\frac{2}{3}) = z_1(\frac{3}{5})$	$z_1(\frac{1}{4}) = z_1(\frac{1}{5})$
4	$z_3(\frac{1}{2}) = z_3(\frac{1}{4})$	gut	
3	gut		

Da wir für „gut“ noch keine explizite Begründung in der Tabelle angegeben haben, liefern wir sie nach:

i	$i/7$	$i/4$	$i/3$	$i/2$
1	$0{,}\overline{142857}$	0,25	$0{,}\overline{3}$	0,5
2	$0{,}\overline{285714}$	0,5	$0{,}\overline{6}$	
3	$0{,}\overline{428571}$	0,75		
4	$0{,}\overline{571428}$			
5	$0{,}\overline{714285}$			
6	$0{,}\overline{857142}$			

Bei den betrachteten Halben, Vierteln und Siebteln ganzer Zahlen kommen nach dem Komma lediglich Ziffern aus $\{0, 1, 2, 4, 5, 7, 8\}$, bei den betrachteten Dritteln lediglich Ziffern aus $\{3, 6\}$, wie aus der zweiten Tabelle ersichtlich ist. Da diese beiden Mengen disjunkt sind, bildet 3 mit 2, 4 und 7 jeweils gute Paare.

Daher

a) ist das Paar $(5, 7)$ nicht gut,

b) ist das Paar $(a, b) = (2, 3)$ das einzige gute Paar mit $a = 2$ und

c) sind die Paare $(3, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(3, 7)$ und $(7, 3)$ alle guten Paare.

Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

Aufgabe 570921 — *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a) .... 2 Punkte

Ergebnis (in einem Kanister ein Liter und in einem anderen vier Liter Flüssigkeit): 1 Punkt

Anzahl der Umfüllungen ist kleiner als acht: 1 Punkt

Teil b) .... 2 Punkte

Teil c) .... 6 Punkte

Angabe des Anteils an Biodiesel in A nach drei Umfüllungen: 2 Punkte

Angabe der Anteile in A und B nach sieben Umfüllungen: 4 Punkte

Aufgabe 570922 — *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a) .... 2 Punkte

Teil b) .... 1 Punkt

Teil c) .... 2 Punkte

Teil d) .... 4 Punkte

Angabe der Werte $p = -\frac{7}{4}$, $q = 6$ und $r = 7$: 2 Punkte

Nachweis, dass $c(x) = -\frac{7}{4} \cdot |x-6| + 7$ den Bedingungen genügt: 2 Punkte

Teil e) .... 1 Punkt

Anmerkung: Wenn d) nicht vollständig gelöst wurde, können auf Schritte zur Herleitung von p, q und r bis zu zwei Punkte vergeben werden, obwohl die Herleitung nicht Teil der Musterlösung zu d) ist und auch ohne Herleitung hier alle Punkte erreicht werden können.

Aufgabe 570923 — *Insgesamt: 10 Punkte*

Erkennen geeigneter kongruenter Dreiecke mit Begründung .... 5 Punkte

Erkennen gleichschenkliger und gleichseitiger Dreiecke .... 2 Punkte

Richtige Schlussfolgerung bezüglich der Längen der gesuchten Strecken .... 3 Punkte

Aufgabe 570924 *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a) .... 1 Punkt
Teil b) .... 5 Punkte

Ausschluss der Zahlen 2, 4, 5, 6 und 8 für b: 1 Punkt
Richtige Untersuchung der Zahlen 3, 7 und 9: 2 Punkte
Erkenntnis, dass b nicht größer als 9 sein kann, und Angabe des Ergebnisses: 2 Punkte

Teil c) .... 4 Punkte

Finden der restlichen Paare: 2 Punkte
Systematische Herleitung bzw. Begründung, dass es keine weiteren Paare gibt: 2 Punkte

Anmerkung: Es gibt verschiedene Argumente, mit denen man eine größere Anzahl von Paaren aus der weiteren Betrachtung ausschließen kann, welche zum Teil in den Lösungen schon genannt wurden. Bei guten Paaren (a, b)

– müssen beide Zahlen einstellig sein, da bei mehrstelligen Zahlen n die betrachteten Brüche $\frac{i}{n}$ an der ersten Nachkommastelle alle Ziffern durchlaufen,
– muss eine der beiden Zahlen teilerfremd zu 10 sein, weil es sonst im betrachteten Bereich endliche Dezimalbrüche $\frac{i}{a}$ und $\frac{j}{b}$ gibt,
– müssen die beiden Zahlen teilerfremd zueinander sein, weil bei einem gemeinsamen Teiler t stets $\frac{a/t}{a} = \frac{b/t}{b}$ gilt,
– muss eine der beiden Zahlen kleiner als 5 sein, weil sonst $\frac{a-1}{a}$ und $\frac{b-1}{b}$ als erste Ziffer eine 8 haben oder eine der beiden Zahlen nicht einstellig ist,
– kann man sich auf $a > b$ beschränken, da (a, a) nicht gut ist und mit (a, b) auch (b, a) gut ist, ...

Bei systematischen Lösungen mit nachträglicher Beantwortung der Teilaufgaben etwa gibt es insgesamt sechs Punkte für die korrekte Behandlung aller nicht guten Paare (a, b) – davon einen Punkt an der Stelle, wo (5,7) korrekt untersucht wird, einen Punkt für eine obere Schranke für a und b (erstgenanntes Argument) und bis zu drei Punkte für weitere Argumente, die viele weitere Paare ausschließen. Die restlichen Punkte für die Behandlung von nicht guten Paaren gibt es für die Einzelfallbehandlung der nicht guten Paare, die nach diesen Argumenten noch übrig bleiben.

In der vorliegenden Variante mit systematischer Abarbeitung gäbe es also einen Punkt auf das Argument für Einstelligkeit von a und b, einen Punkt für die Einschränkung $a < b$, zwei Punkte für die Einschränkung $a < 5$, da man damit sowohl viele Paare los wird als auch (5,7) behandelt, und die restlichen zwei Punkte für die Vollständigkeit der Tabelle und die Korrektheit der Einträge in der Tabelle.

Für die korrekte Behandlung aller guten Paare verbleiben also 4 Punkte, davon einer für die begründete Nennung von (2,3), zwei Punkte für die Nennung aller (weiteren) guten Paare und ein Punkt für die korrekte Begründung, dass alle genannten Paare gut sind.