Olympiadeklasse **8**

57. Mathematik-Olympiade
2. Runde (Regionalrunde)
Lösungen

570821 Lösung *10 Punkte*

Teil a) 20 % von 20 000 € sind 4 000 €. 15 % von 20 000 € sind 3 000 €. Demnach beträgt der Wertverlust (4 000 € + 3 000 € =) 7 000 €. Der Zeitwert beträgt nach zwei Jahren folglich (20 000 € − 7 000 € =) 13 000 €.

Lösungsvariante: Da die Prozentangaben für die Wertverluste einheitlich auf den Kaufpreis bezogen sind, berechnet sich der Zeitwertanteil durch $100\,\% - (20\,\% + 15\,\%) = 65\,\%$. Somit folgt, dass der Zeitwert 65 % von 20 000 €, also $(20\,000 \cdot \frac{65}{100} =)$ 13 000 € beträgt.

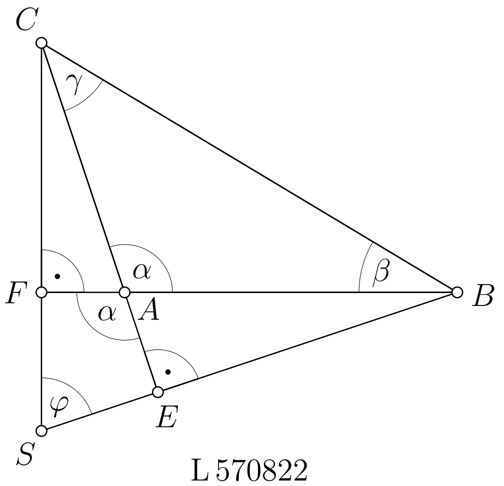
Teil b) Wegen $\frac{20\,000\cdot 100}{50\,000} = 40$ beträgt der Zeitwert 40 % vom Kaufpreis. Der Wertverlust beträgt nach vier Jahren somit $(100\,\% - 40\,\% =)$ 60 %. Es sei $x\,\%$ der Wertverlust im vierten Jahr, dann gilt nach Voraussetzung $20\,\% + 15\,\% + 15\,\% + x\,\% = 60\,\%$, also $x = 10\,\%$. Herr Neubert hat für das vierte Jahr einen Wertverlust von 10 % veranschlagt.

Teil c) Die Summe der Wertverluste beträgt $(20\,\% + 15\,\% + 15\,\% =)$ 50 % des Kaufpreises. Daher sind 20 000 € die restlichen 50 % des Kaufpreises. Dieser hatte somit 40 000 € betragen. Die weitere Verringerung des Zeitwertes beträgt 10 % von 20 000 €, das sind 2 000 €. Als verringerter Zeitwert verbleiben (20 000 € − 2 000 € =) 18 000 €. Wegen $\frac{18\,000\cdot 100}{40\,000} = 45$ sind das 45 % vom Kaufpreis.

570822 Lösung *10 Punkte*

Die Größen der Innenwinkel $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle CBA$ und $\sphericalangle ACB$ seien wie üblich mit α, β und γ bezeichnet; der Winkel $\sphericalangle BSC$ habe die Größe φ, siehe Abbildung L 570822. Das Viereck $SEAF$ hat mit den Winkeln $\sphericalangle AES$ und $\sphericalangle SFA$ zwei rechte Winkel, da die Geraden AB und CF sowie AC und BE senkrecht aufeinander stehen. Da das Dreieck ABC nach Voraussetzung stumpfwinklig ist, liegt der Punkt A zwischen den Punkten C und E und zwischen den Punkten B und F. Nach dem Scheitelwinkelsatz gilt daher $|\sphericalangle FAE| = \alpha$. Somit gilt $\alpha + 90° + \varphi + 90° = 360°$ und daher

$$\varphi = 180° - \alpha\,. \tag{1}$$



L 570822

Nach dem Innenwinkelsatz im Dreieck ABC gilt $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, also

$$\beta + \gamma = 180° - \alpha\,. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt $\varphi = \beta + \gamma$. Die Größe φ des Winkels $\sphericalangle BSC$ ist also tatsächlich gleich der Summe aus den Größen β und γ der beiden spitzen Innenwinkel $\sphericalangle CBA$ und $\sphericalangle ACB$ des Dreiecks ABC.

Bemerkung: Man kann beweisen, dass die entsprechende Aussage auch für spitzwinklige Dreiecke ABC gilt.

<u>570823 Lösung</u> *10 Punkte*

Teil a) Es gelten $7 \circ 4 = 7 - \frac{7}{4} = \frac{28-7}{4} = \frac{21}{4}$ und $7 \circ (-2) = 7 - \frac{7}{-2} = \frac{14+7}{2} = \frac{21}{2}$.

Teil b) Es gelten $3 \circ 4 = 3 - \frac{3}{4} = \frac{12-3}{4} = \frac{9}{4}$ und $4 \circ 3 = 4 - \frac{4}{3} = \frac{12-4}{3} = \frac{8}{3}$. Wegen $\frac{9}{4} \neq \frac{8}{3}$ gilt die Gleichung $3 \circ 4 = 4 \circ 3$ nicht.

Es gelten

$$(6 \circ 3) \circ 4 = 6 \circ 3 - \frac{6 \circ 3}{4} = 6 - \frac{6}{3} - \frac{6 - \frac{6}{3}}{4} = 4 - \frac{4}{4} = 3$$

und

$$6 \circ (3 \circ 4) = 6 \circ \left(3 - \frac{3}{4}\right) = 6 \circ \frac{12-3}{4} = 6 \circ \frac{9}{4} = 6 - \frac{6}{\frac{9}{4}} = 6 - \frac{24}{9} = \frac{18-8}{3} = \frac{10}{3}\,.$$

Wegen $3 \neq \frac{10}{3}$ gilt auch die Gleichung $(6 \circ 3) \circ 4 = 6 \circ (3 \circ 4)$ nicht.

Teil c) Es gilt $a \circ 2 = 2$ genau dann, wenn $a - \frac{a}{2} = 2$ gilt. Das ist äquivalent zu $\frac{a}{2} = 2$ und daher zu $a = 4$.

Teil d) Wegen $a \circ b = a - \frac{a}{b} = a \cdot (1 - \frac{1}{b})$ gilt $a \circ b = 0$ genau dann, wenn $a = 0$ gilt und b eine beliebige, von 0 verschiedene ganze Zahl ist oder wenn $1 - \frac{1}{b} = 0$ gilt, also $b = 1$ gilt und a eine beliebige ganze Zahl ist. Die gesuchten Paare sind also alle Paare $(0, b)$ mit einer von 0 verschiedenen ganzen Zahl b und alle Paare $(a, 1)$ mit einer ganzen Zahl a.

<u>570824 Lösung</u> *10 Punkte*

Teil a) Nach den Aussagen (3), (4) und (5) muss die Anzahl der Kugeln durch 3, 4 und 5, also durch $(3 \cdot 4 \cdot 5 =)$ 60 teilbar sein. Nach (7) sind es weniger als $(7 \cdot 20 =)$ 140 Kugeln. Es können daher nur genau 60 oder genau 120 Kugeln sein.

Angenommen, es sind 60 Kugeln. Wegen (3) sind dann genau 20 Kugeln zu einem Teil blau. Wegen (4) gibt es genau 15 blau-weiße Kugeln. Wegen (5) gibt es genau 12 rot-grüne Kugeln. Wegen (6) gibt es genau 2 rot-blaue Kugeln.

Da es insgesamt genau 20 Kugeln sind, die zu einem Teil blau sind, darunter genau 15 blau-weiße und genau 2 rot-blaue Kugeln, müssen es genau 3 blau-grüne Kugeln sein. Dies widerspricht der Aussage (2).

Folglich können es nicht 60 Kugeln sein. Es müssen also 120 Kugeln sein.

Teil b) Wegen (3) sind genau 40 Kugeln zu einem Teil blau. Wegen (4) gibt es genau 30 blau-weiße Kugeln. Wegen (5) gibt es genau 24 rot-grüne Kugeln. Wegen (6) gibt es genau 4 rot-blaue Kugeln.

Da es insgesamt genau 40 Kugeln sind, die zu einem Teil blau sind, darunter genau 30 blau-weiße und genau 4 rot-blaue Kugeln, sind es genau 6 blau-grüne Kugeln.

Da unter den 120 Kugeln genau 6 blau-grüne Kugeln sind, ist ihr Anteil $(\frac{6}{120} =)$ 0,05, also 5 %.

Teil c) Der Anteil der Anzahl 6 der blau-grünen Kugeln an der Anzahl 40 der Kugeln, die zu einem Teil blau sind, ist $(\frac{6}{40} =)$ 0,15, also 15 %.

Lösungsvariante: Da die Kugeln zweifarbig sind und nur die vier Farben blau, grün, rot und weiß vorkommen, gibt es höchstens 6 Arten zweifarbiger Kugeln. Deren Anzahlen bezeichnen wir entsprechend der beteiligten Farben mit bg, br, bw, gr, gw und rw.

Die Anzahl aller Kugeln, die auf einer Seite blau sind, wird mit bf bezeichnet. Die Anzahl aller Kugeln wird mit x bezeichnet. Nach Aufgabenstellung gilt:

(2) bg ist eine gerade Zahl,
(3) $bf = \frac{1}{3} \cdot x$,
(4) $bw = \frac{1}{4} \cdot x$,
(5) $gr = \frac{1}{5} \cdot x$,
(6) $gr = 6 \cdot br$,
(7) $x < 140$.

Teil a) Aus (3), (4) und (5) folgt, dass x durch 3, 4 und 5, also durch $(3 \cdot 4 \cdot 5 =)$ 60 teilbar ist. Aus (7) folgt dann, dass es nur genau 60 oder 120 Kugeln sein können.

Es gelte $x = 60$. Aus (3), (4), (5) und (6) folgt dann $bf = 20$, $bw = 15$, $gr = 12$, $br = 2$. Wegen $bf = bg + br + bw$ folgt hieraus $20 = bg + 2 + 15$, also $bg = 3$ im Widerspruch zur Aussage (2). Folglich müssen es 120 Kugeln sein.

Teil b) Nach Teil a) gilt $x = 120$. Aus (5) und (6) folgt dann $6 \cdot br = \frac{1}{5} \cdot x$, also $br = \frac{1}{30} \cdot x = 4$. Hieraus und aus (3), (4) und (5) folgt $bf = 40$, $bw = 30$, $gr = 24$ und $br = 4$. Wegen $bf = bg + br + bw$ folgt hieraus $40 = bg + 4 + 30$, also $bg = 6$. Wegen $x = 120$ und $\frac{6}{120} = 0{,}05$ folgt hieraus: Der gesuchte Anteil der blau-grünen Kugeln an der Gesamtzahl der Kugeln beträgt $5\,\%$.

Teil c) Es gelten $bf = 40$ und $bg = 6$. Der Anteil der Anzahl der blau-grünen Kugeln an der Anzahl der Kugeln, die zu einem Teil blau sind, ist $\frac{bg}{bf}$ und wegen $\frac{bg}{bf} = \frac{6}{40} = 0{,}15$ also $15\,\%$.

Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

Aufgabe 570821	*Insgesamt: 10 Punkte*
Teil a)	3 Punkte
Teil b)	3 Punkte
Teil c)	4 Punkte

Aufgabe 570822	*Insgesamt: 10 Punkte*
Problemerfassung (Skizze o.ä.)	2 Punkte
Erkennbare Beweisidee	2 Punkte
Geordnete Angabe aller zum Beweis erforderlichen Feststellungen	3 Punkte
Zugehörige Begründungen	3 Punkte

Aufgabe 570823	*Insgesamt: 10 Punkte*
Teil a)	4 Punkte
Teil b)	2 Punkte
Teil c)	2 Punkte
Teil d)	2 Punkte

Aufgabe 570824	*Insgesamt: 10 Punkte*
Teil a)	5 Punkte
Teil b)	3 Punkte
Teil c)	2 Punkte