Olympiadeklasse
7

57. Mathematik-Olympiade
2. Runde (Regionalrunde)
Lösungen

570721 Lösung *10 Punkte*

Da es bei 11 Pfosten genau 10 Zwischenräume zwischen den Pfosten sind, diese Zwischenräume jeweils 2,40 m lang sein sollen und die Breite der Pfosten vernachlässigt werden soll, hat der Zaun eine Länge von $(10 \cdot 2{,}40\,\text{m} =)$ 24 m.

Bei einer Länge von 1,50 m je Zwischenraum sind es $(24 : 1{,}5 = 48 : 3 =)$ 16 Zwischenräume, wofür $(16 + 1 =)$ 17 Pfosten benötigt werden.

570722 Lösung *10 Punkte*

Die Fahrzeiten von Auto und Zug werden mit t_A und t_Z bezeichnet, die Durchschnittsgeschwindigkeiten entsprechend mit v_A und v_Z.

Teil a) Nach Aufgabenstellung gelten $t_\text{Z} = \frac{3}{4}\,\text{h}$ und $v_\text{A} = 72\,\text{km/h}$.

Da das Auto eine Viertelstunde später startete und 5 Minuten eher ankam, gilt

$$t_\text{A} = t_\text{Z} - \frac{1}{4}\,\text{h} - 5\,\text{min} = \frac{3}{4}\,\text{h} - \frac{1}{4}\,\text{h} - 5\,\text{min} = \frac{6}{12}\,\text{h} - \frac{1}{12}\,\text{h} = \frac{5}{12}\,\text{h}\,.$$

Für die Entfernung s von Audorf nach Bergstadt gilt daher

$$s = t_\text{A} \cdot v_\text{A} = \frac{5}{12}\,\text{h} \cdot 72\,\text{km/h} = 5 \cdot \frac{72}{12}\,\text{km} = 5 \cdot 6\,\text{km} = 30\,\text{km}\,.$$

Folglich ist Audorf 30 km von Bergstadt entfernt.

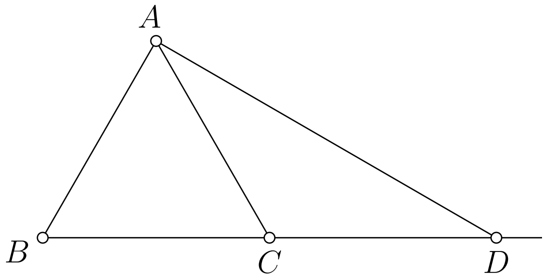
Teil b) Aus $t_\text{Z} = \frac{3}{4}\,\text{h}$ und $s = 30\,\text{km}$ folgt

$$v_\text{Z} = \frac{s}{t_\text{Z}} = \frac{30\,\text{km}}{\frac{3}{4}\,\text{h}} = 4 \cdot \frac{30}{3}\,\text{km/h} = 40\,\text{km/h}\,.$$

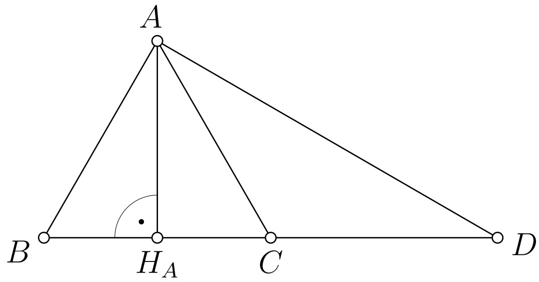
Folglich beträgt die Durchschnittsgeschwindigkeit des Zuges 40 km/h.

570723 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Für die geforderte Zeichnung mit Beschriftung siehe Abbildung L 570723 a.



L 570723 a



L 570723 b

Teil b) Der Innenwinkel $\sphericalangle DCA$ des Dreiecks ACD ist ein Nebenwinkel zum Winkel $\sphericalangle ACB$, woraus $|\sphericalangle DCA| = 180° - |\sphericalangle ACB|$ folgt. Da das Dreieck ABC gleichseitig ist, sind alle seine Innenwinkel 60° groß, und es gilt daher

$$|\sphericalangle DCA| = 180° - |\sphericalangle ACB| = 180° - 60° = 120° . \tag{1}$$

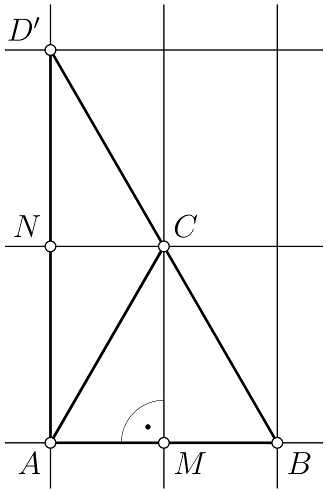
Da laut Aufgabenstellung $|CD| = |BC|$ gilt und das Dreieck ABC gleichseitig ist, gilt auch $|CD| = |AC|$. Das Dreieck ACD ist folglich gleichschenklig mit der Basis $\overline{AD}$. Nach dem Basiswinkelsatz sind die Basiswinkel $\sphericalangle CAD$ und $\sphericalangle ADC$ gleich groß, und aus (1) und nach dem Innenwinkelsatz folgt somit

$$|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle ADC| = \frac{1}{2} \cdot (180° - |\sphericalangle DCA|) = \frac{1}{2} \cdot (180° - 120°) = 30° .$$

Die Innenwinkel des Dreiecks ACD haben also die Größen 30°, 30° und 120°.

Teil c) Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist die Hälfte des Produkts aus einer Seitenlänge und der Länge der zugehörigen Höhe. Es sei $\overline{AH_A}$ die Höhe des Dreiecks ABC zum Eckpunkt A. Da die Punkte B, C und D nach Voraussetzung auf einer Geraden liegen, ist die Strecke $\overline{AH_A}$ auch die Höhe zum Eckpunkt A im Dreieck ACD, siehe Abbildung L 570723 b. Da die entsprechenden Grundseiten $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$ nach Voraussetzung gleich lang sind, haben die Dreiecke ABC und ACD daher einen gleich großen Flächeninhalt.

Lösungsvariante zu Teil c) Wir betten das Dreieck ABC in ein Parkett aus zueinander kongruenten Rechtecken ein: Es sei M der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$. Da das Dreieck ABC gleichseitig ist, ist $\sphericalangle CMA$ ein rechter Winkel. Das Parkett wird nun erzeugt durch die Gerade AB und die zu ihr parallelen Geraden im Abstand $k \cdot |CM|$ mit $k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$. Das Parkett wird weiter erzeugt durch die Gerade CM und die zu ihr parallelen Geraden im Abstand $k \cdot |AM|$ mit $k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$. Nach Konstruktion des Parketts sind wegen $|AM| = |BM|$ die Punkte A, B, C und M Schnittpunkte von Gitterlinien. Der vierte Eckpunkt des Rechtecks mit den Ecken A, M und C wird mit N bezeichnet. Es sei D' der auf der Geraden AN gelegene Eckpunkt des von $AMCN$ verschiedenen Rechtecks, welches die Seite $\overline{CN}$ besitzt, siehe Abbildung L 570723 c.



L 570723 c

Nach Konstruktion des Rechtecks liegen dann die Punkte B, C und D' auf einer Geraden und wegen der Kongruenz der Rechtecke sind auch ihre Diagonalen gleich lang, es gilt also $|BC| = |CD'|$. Da der Punkt D nach Konstruktion auf der Verlängerung der Seite BC über C hinaus liegt und die Strecken $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$ gleich lang sind, folgt $D = D'$.

Wegen $D = D'$ ist das Dreieck ACD wie das Dreieck ABC aus genau zwei zum Dreieck AMC kongruenten Dreiecken zusammengesetzt. Folglich sind die Flächeninhalte der Dreiecke ABC und ACD gleich groß.

<u>570724 Lösung</u> *10 Punkte*

Wir bezeichnen die drei Ziffern aus der Aufgabenstellung mit a, b und c. Aus diesen nach Voraussetzung paarweise verschiedenen Ziffern kann man genau sechs dreistellige Zahlen bilden, die jede dieser Ziffern a, b und c genau einmal enthalten, nämlich abc, acb, bac, bca, cab und cba.

Wir stellen fest, dass sowohl die Summe der Einer der sechs gebildeten dreistelligen Zahlen als auch die Summe ihrer Zehner und die Summe ihrer Hunderter $2 \cdot a + 2 \cdot b + 2 \cdot c = 2 \cdot (a + b + c)$ ist.

Da die Summe der sechs gebildeten dreistelligen Zahlen auf 18 endet, endet die Summe ihrer Einer, also $2 \cdot (a + b + c)$, auf 8. Da die Summe $a + b + c$ höchstens den Wert $(7 + 8 + 9 =)\ 24$ haben kann, hat $2 \cdot (a + b + c)$ folglich höchstens den Wert 48. Somit kommen für den Wert von $2 \cdot (a + b + c)$ nur 8, 18, 28, 38 und 48 in Frage.

Da die Summe der Zehner der sechs gebildeten dreistelligen Zahlen, also $2 \cdot (a+b+c)$, ebenfalls auf 8 endet, der Zehner der Summe laut Aufgabenstellung jedoch 1 ist, muss die Summe der Einer einen Übertrag liefern, der auf die Ziffer 3 endet. Daraus folgt, dass nur $2 \cdot (a+b+c) = 38$ gelten kann. Wegen $38 + 3 = 41$ ist der Übertrag zur Hunderterstelle somit 4.

Nun können wir die ersten beiden Stellen der Summe aus der Summe der Hunderter der sechs gebildeten dreistelligen Zahlen, also $2 \cdot (a + b + c)$, und dem Übertrag von der Zehnerstelle berechnen. Wir erhalten $(38 + 4 =)\ 42$.

Die gesuchte Summe ist also durch die Angaben der Aufgabenstellung eindeutig bestimmt, und zwar mit dem Wert 4 218.

Lösungsvariante: Wir bezeichnen die drei Ziffern aus der Aufgabenstellung mit a, b und c. Da diese drei Ziffern alle ungleich 0 und zudem paarweise verschiedene Ziffern sind, also $a \neq b$, $a \neq c$ und $b \neq c$ gilt, gibt es genau 6 dreistellige Zahlen, die jede dieser Ziffern a, b und c genau einmal enthalten, nämlich $a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$, $a \cdot 100 + c \cdot 10 + b$, $b \cdot 100 + a \cdot 10 + c$, $b \cdot 100 + c \cdot 10 + a$, $c \cdot 100 + a \cdot 10 + b$ und $c \cdot 100 + b \cdot 10 + a$. Die Summe dieser Zahlen ist $222 \cdot (a + b + c)$. Da a, b und c paarweise verschiedene Ziffern sind, gilt

$$6 = 1 + 2 + 3 \leq a + b + c \leq 7 + 8 + 9 = 24\,.$$

Da $222 \cdot (a + b + c)$ auf 18 endet, kann die letzte Stelle von $a + b + c$ nur 4 oder 9 sein. Daher gilt

$$a + b + c \in \{9, 14, 19, 24\}\,.$$

Wegen $222 \cdot 9 = 1\,998$, $222 \cdot 14 = 3\,108$, $222 \cdot 19 = 4\,218$ und $222 \cdot 24 = 5\,328$ kann nur $a + b + c = 19$ gelten, weswegen die gesuchte Summe nur 4 218 sein kann. Die gesuchte Summe ist also durch die Angaben der Aufgabenstellung eindeutig bestimmt, und zwar mit dem Wert 4 218.

Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

Aufgabe 570721	*Insgesamt: 10 Punkte*
Ermittlung der Zaunlänge	5 Punkte
Ermittlung der Pfostenanzahl	5 Punkte

Aufgabe 570722	*Insgesamt: 10 Punkte*
Teil a)	7 Punkte
Teil b)	3 Punkte

Aufgabe 570723	*Insgesamt: 10 Punkte*
Teil a)	2 Punkte
Teil b)	4 Punkte
Teil c)	4 Punkte

Aufgabe 570724	*Insgesamt: 10 Punkte*
Prinzipiell geeigneter Lösungsansatz	2 Punkte
Vollständige, begründete Herleitung	6 Punkte
Korrektes Ergebnis	2 Punkte