Olympiadeklasse **6**

57. Mathematik-Olympiade
2. Runde (Regionalrunde)
Lösungen

570621 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Alle Zahlen, die durch 4 und 5 teilbar sind, sind auch durch $(4 \cdot 5 =)\, 20$ teilbar, weil 4 und 5 teilerfremd sind. Von den zweistelligen und durch 20 teilbaren Zahlen 20, 40, 60 und 80 ist nur die Zahl 60 durch 6 teilbar. Folglich ist 60 die einzige Zahl, die die geforderten Bedingungen erfüllt.

Ein anderer Lösungsweg verwendet das kleinste gemeinsame Vielfache von 4, 5 und 6:

$$\begin{aligned} 4 &= 2^2 \\ 5 &= 5 \\ 6 &= 2 \cdot 3 \\ \text{kgV} &= 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60 \end{aligned}$$

Folglich ist 120 das nächstgrößere gemeinsame Vielfache. Weil 120 bereits dreistellig ist, ist 60 die einzige Zahl, die die geforderten Bedingungen erfüllt.

Teil b) Die Vorgänger der zu ermittelnden Zahlen müssen durch 5 und 7 teilbar sein. Weil 5 und 7 als Primzahlen teilerfremd sind, müssen die Vorgänger der zu ermittelnden Zahlen durch $(5 \cdot 7 =)\, 35$ teilbar sein. Es gibt nur zwei zweistellige Zahlen, die durch 35 teilbar sind: 35 und 70. Die nächste der durch 5 und 7 teilbaren Zahlen ist $(3 \cdot 5 \cdot 7 =)\, 105$ und nicht mehr zweistellig.

Die Nachfolger der Zahlen 35 und 70 lassen dann bei den Divisionen durch 5 und 7 jeweils den Rest 1 und sind zweistellig.

Folglich sind die gesuchten Zahlen 36 und 71.

Teil c) Die Vorgänger der zu ermittelnden Zahlen müssen durch 3, 5 und 7 teilbar sein. Weil 3, 5 und 7 als Primzahlen paarweise teilerfremd sind, müssen die Vorgänger der zu ermittelnden Zahlen durch $(3 \cdot 5 \cdot 7 =)\, 105$ teilbar sein. 105 ist folglich das kleinste gemeinsame Vielfache von 3, 5 und 7 und bereits dreistellig. Alle Vielfachen von 105 sind durch 3, 5 und 7 teilbar. Die dreistelligen Vielfachen von 105 sind 105, 210, 315, 420, 525, 630, 735, 840 und 945.

Die Nachfolger dieser Zahlen sind ebenfalls dreistellig und erfüllen folglich die Bedingungen der Aufgabe. Es sind 106, 211, 316, 421, 526, 631, 736, 841 und 946.

570622 Lösung *10 Punkte*

Der Flächeninhalt des Quadrates $ABCD$ beträgt $(4 \cdot 4 =)16$ Kästchen.

Teil a) Der Flächeninhalt der grau markierten Fläche $EBCD$ kann berechnet werden, indem man vom Flächeninhalt des Quadrates $ABCD$ den Flächeninhalt des links liegenden Dreiecks AED subtrahiert. Dessen Flächeninhalt ist $(\frac{3 \cdot 4}{2} =)\, 6$ Kästchen, so dass der Flächeninhalt der grauen Fläche $EBCD$ $(16 - 6 =)\, 10$ Kästchen beträgt.

Teil b) Der Flächeninhalt der grau markierten Fläche EFD kann berechnet werden, indem man vom Flächeninhalt des Quadrats die Flächeninhalte der drei Dreiecke AED, EBF und FCD in den Ecken abzieht.

Das linke Dreieck AED hat, wie in a) gezeigt, einen Flächeninhalt von 6 Kästchen; der Flächeninhalt des oberen Dreiecks FCD beträgt $(\frac{4 \cdot 2}{2} =)$ 4 Kästchen, der Flächeninhalt des unteren Dreiecks EBF beträgt $(\frac{1 \cdot 2}{2} =)$ 1 Kästchen.

Folglich hat die graue Fläche EFD den Flächeninhalt $(16 - 6 - 4 - 1 =)$ 5 Kästchen.

Teil c) Der Flächeninhalt der grau markierten Fläche EFG kann berechnet werden, indem man vom Flächeninhalt des Quadrats die Flächeninhalte der beiden Dreiecke EBF und FCG sowie den Flächeninhalt der linken Fläche $AEGD$ abzieht.

Die linke Fläche $AEGD$ kann in ein Rechteck mit einem Flächeninhalt von $(4 \cdot 1 =)$ 4 Kästchen und ein Dreieck mit dem Flächeninhalt von $(\frac{4 \cdot 2}{2} =)$ 4 Kästchen zerlegt werden.

Das Dreieck EBF hat, wie bereits gezeigt, einen Flächeninhalt von 1 Kästchen, das Dreieck FCG hat einen Flächeninhalt von $(\frac{3 \cdot 2}{2} =)$ 3 Kästchen.

Folglich hat die graue Fläche EFG einen Inhalt von $(16 - 8 - 1 - 3 =)$ 4 Kästchen.

570623 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Frau Nolle benötigt $(400\,\text{km} : 100\,\text{km/h} =)$ 4 Stunden und Frau Bock benötigt $(600\,\text{km} : 120\,\text{km/h} =)$ 5 Stunden.

Teil b) Wenn Frau Nolle losfährt, ist Frau Bock $1\frac{1}{2}$ Stunden unterwegs und hat folglich eine Strecke von $(1{,}5\,\text{h} \cdot 120\,\text{km/h} =)$ 180 km zurückgelegt.

Teil c) Da Bielefeld auf direktem Weg von Bonn nach Berlin liegt, beträgt die Strecke zwischen Bonn und Bielefeld $(600 - 400 =)$ 200 Kilometer. Für 200 Kilometer benötigt Frau Bock $(200\,\text{km} : 120\,\text{km/h} = \frac{5}{3}\,\text{h} =)$ 100 Minuten und ist demzufolge um 11:40 Uhr in Bielefeld.

Teil d) Frau Bock legt in drei Minuten sechs Kilometer zurück, während Frau Nolle in derselben Zeit nur 5 km zurücklegt. Also holt Frau Bock alle drei Minuten einen Kilometer auf. Da sie $(200\,\text{km} - 180\,\text{km} =)$ 20 km aufholen muss, benötigt sie dafür ab dem Zeitpunkt 11:30 Uhr noch $(20 \cdot 3\,\text{min} =)$ 60 min. Sie holt also Frau Nolle um 12:30 Uhr ein.

Lösungsvariante:

Frau Nolle hat bereits $(100\,\text{km/h} \cdot \frac{1}{6}\,\text{h} =)$ $\frac{50}{3}$ km zurückgelegt, als Frau Bock in Bielefeld ankommt. Frau Bock fährt 20 km/h schneller als Frau Nolle und benötigt somit $(\frac{50}{3}\,\text{km} : 20\,\text{km/h} = \frac{5}{6}\,\text{Stunden} =)$ 50 Minuten, um sie einzuholen. Die beiden treffen sich also um (11:40 Uhr + 50 Minuten =) 12:30 Uhr.

570624 Lösung *10 Punkte*

Vorweg: Die Zahl $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$ bezeichnen wir mit $n!$ (gelesen n Fakultät). Wenn n Dinge auf n Plätze verteilt werden sollen, so gibt es genau $n!$ Möglichkeiten.

Teil a) Die vier Buchstaben sind unterschiedlich, deswegen gibt es $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! =$ 24 Möglichkeiten, denn: Für den ersten Platz in der Reihenfolge der Buchstaben gibt es 4 Möglichkeiten, für den zweiten Platz gibt es dann noch 3 Möglichkeiten, für den dritten Platz noch 2 Möglichkeiten. Der letzte Platz ist dann festgelegt (eine Möglichkeit).

Teil b) ANNE hat nicht Recht, denn bei ihrem Namen sind die beiden N's nicht unterscheidbar. Wären sie unterscheidbar, z. B. als N und N, wären es tatsächlich wieder 24 Möglichkeiten.

Da aber immer ein Paar von Möglichkeiten, also z.B. NAEN und NAEN, nicht zu unterscheiden ist, gibt es nur $(24 : 2 =)\,12$ Möglichkeiten.

Teil c) Bei NANNI ist es noch schlimmer: Wären alle Buchstaben unterscheidbar, so gäbe es $(5! =)\,120$ Möglichkeiten. Nun sind aber die drei N's nicht unterscheidbar. Wären sie unterscheidbar, also z. B. **N**, N und N, dann gäbe es tatsächlich diese 120 Möglichkeiten. Da aber immer sechs Möglichkeiten zusammenfallen (also z.B. A**N**NNI, A**N**NNI, AN**N**NI, AN**N**NI, ANN**N**I, ANN**N**I), gibt es nur $(120 : 6 =)\,20$ Möglichkeiten.

NANNI hat also zwar bezüglich ANNA Recht, bezüglich LENA jedoch nicht – insgesamt stimmt ihre Aussage also nicht.

Teil d) Bei ANNETTE machen wir es einmal mit System: „ANNETTE“ hat 7 Buchstaben, dabei treten allerdings das E zweimal auf, das N zweimal und das T ebenfalls zweimal.

Die Anzahl der Möglichkeiten ist folglich

$$Anzahl(\text{ANNETTE}) = \frac{7!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{5040}{8} = 630.$$

Tatsächlich ist $630 > 24 + 12 + 20 = 56$: LENA hat Recht.

Hinweis: Bei den Aufgabenteilen a), b) und c) ist ein systematisches und vollständiges Aufzählen der Möglichkeiten als vollständig richtig zu werten, ebenso wäre es korrekt, bei d) mehr als 56 Möglichkeiten anzugeben.

Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

Aufgabe 570621 *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a) .... 3 Punkte

Angabe der Zahl 60 1 Punkt
Herleitung und Begründung 2 Punkte

Teil b) .... 3 Punkte

Angabe der Zahlen 36 und 71 1 Punkt
Herleitung und Begründung 2 Punkte

Teil c) .... 4 Punkte

Korrekte Angabe aller Zahlen 2 Punkte
Herleitung und Begründung 2 Punkte

Aufgabe 570622 *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a) .... 3 Punkte

Korrektes Ergebnis 2 Punkte
Herleitung 1 Punkt

Teil b) .... 3 Punkte

Korrektes Ergebnis 2 Punkte
Herleitung 1 Punkt

Teil c) .... 4 Punkte

Korrektes Ergebnis 2 Punkte
Herleitung 2 Punkt

Aufgabe 570623	*Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a) .... 3 Punkte

Korrektes Ergebnis 2 Punkte
Herleitung 1 Punkt

Teil b) .... 2 Punkte

Korrektes Ergebnis 1 Punkt
Herleitung 1 Punkt

Teil c) .... 2 Punkte

Korrektes Ergebnis 1 Punkt
Herleitung 1 Punkt

Teil d) .... 3 Punkte

Korrektes Ergebnis 1 Punkt
Herleitung 2 Punkte

Aufgabe 570624	*Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a) .... 2 Punkte

Ergebnis 1 Punkt
Herleitung 1 Punkt

Teil b) .... 3 Punkte

Ergebnis 1 Punkt
Herleitung 2 Punkte

Teil c) .... 3 Punkte

Ergebnis 1 Punkt
Herleitung 2 Punkte

Teil d) Begründetes Ergebnis .... 2 Punkte