

570521 Lösung

10 Punkte

Teil a) Um das kleinste Produkt zu erhalten, multipliziert man die kleinste einstellige Zahl – also die 1 – mit der kleinstmöglichen Zahl aus den restlichen vier Ziffern.

Das führt zu  $2345 \cdot 1 = 2345$ .

(Die kleinste Zahl aus der Multiplikation mit 2 ist  $1345 \cdot 2 = 2690$ , die kleinste Zahl aus der Multiplikation mit 3 ist  $1245 \cdot 3 = 3735$ , also größer als 2345. Das trifft auch für die jeweils kleinsten Zahlen mit den Faktoren 4 und 5 zu.)

Teil b) Um das größte Produkt zu erhalten, multipliziert man die größte einstellige Zahl – also die 5 – mit der größtmöglichen Zahl aus den restlichen vier Ziffern.

Das führt zu  $4321 \cdot 5 = 21605$ .

(Die anderen Möglichkeiten für die einstellige Zahl liefern kleinere Ergebnisse:  $5321 \cdot 4 = 21284$ ,  $5421 \cdot 3 = 16263$ ,  $5431 \cdot 2 = 10862$ ,  $5432 \cdot 1 = 5432$ .)

Teil c) 6710 lässt sich durch 1, 2 und 5 teilen, nicht durch 3 oder 4.

Es gilt  $6710 : 1 = 6710$ . Diese Zahl lässt sich nicht aus den vier übrigen Ziffernkarten zusammensetzen.

Es gilt  $6710 : 2 = 3355$ . Diese Zahl lässt sich ebenfalls nicht aus den vier übrigen Ziffernkarten zusammensetzen.

Es gilt  $6710 : 5 = 1342$ . Diese Zahl lässt sich ersichtlich aus den vier übrigen Ziffernkarten zusammensetzen, also ist die einzig mögliche Multiplikation  $1342 \cdot 5$ .

570522 Lösung

10 Punkte

Erste Gruppe:

Ein Zeitstrahl für die Schatzsuche veranschaulicht die Aufgabe:

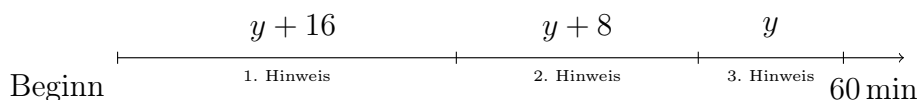


Für das Finden des zweiten und dritten Hinweises benötigt die Gruppe  $(60 - 8 = ) 52$  Minuten, welche sich zu einem Teil  $x$  auf den zweiten Hinweis und zu drei Teilen  $3x$  auf den dritten Hinweis aufteilen; insgesamt 4 Teile oder  $4x$ . Daraus folgt, dass die Gruppe zum Finden des zweiten Hinweises  $(52 : 4 = ) 13$  Minuten benötigt und für den dritten Hinweis  $(3 \cdot 13 = ) 39$  Minuten.

(Man kann auch die Gleichung  $4x = 52$  aufstellen und  $x = 13$  als Lösung erhalten.)

Probe:  $8 \text{ min} + 13 \text{ min} + 39 \text{ min} = 60 \text{ min}$  und  $13 \text{ min} \cdot 3 = 39 \text{ min}$

Zweite Gruppe:



Die geringste Zeit wird für den dritten Hinweis benötigt. Dieser Zeitraum wird mit  $y$  bezeichnet. Dann ist die benötigte Zeit für den zweiten Hinweis  $y + 8$  und für den ersten  $y + 16$ .

Die Zeit für das Finden des dritten Hinweises beträgt dann  $y = (60 - (16 + 8)) : 3 = 12$  Minuten. Es folgt als Zeit für den zweiten Hinweis  $(12 + 8 = ) 20$  Minuten und für den ersten Hinweis  $(20 + 8 = ) 28$  Minuten.

Probe:  $28 \text{ min} + 20 \text{ min} + 12 \text{ min} = 60 \text{ min}$ ,  $28 \text{ min} - 8 \text{ min} = 20 \text{ min}$  und  $20 \text{ min} - 8 \text{ min} = 12 \text{ min}$

*Hinweis auf eine Lösungsvariante:*

Wir halten die gegebenen Bedingungen in einer Tabelle fest, wobei wir die benötigte Gesamtzeit in Minuten angeben.

	1. Hinweis	2. Hinweis	3. Hinweis	Gesamtzeit
1. Gruppe	8 Minuten	$x$ Minuten	$3 \cdot x$ Minuten	60 Minuten
2. Gruppe	$y$ Minuten	$(y - 8)$ Minuten	$(y - 8) - 8$ Minuten	60 Minuten

Dann gilt nach Aufgabenstellung

$$8 + x + 3 \cdot x = 60,$$

also  $8 + 4 \cdot x = 60$

und

$$y + (y - 8) + (y - 16) = 60,$$

also  $3 \cdot y - 24 = 60.$

Diese Gleichungen lassen sich durch systematisches Probieren lösen. Auf diese Weise erkennt man:

$$8 + 4 \cdot 12 = 8 + 48 = 56 < 60,$$

$$8 + 4 \cdot \mathbf{13} = 8 + 52 = 60,$$

$$8 + 4 \cdot 14 = 8 + 56 = 64 > 60.$$

Hieraus folgt  $x = 13$  und hieraus lassen sich die für die erste Gruppe gesuchten Zeiten berechnen.

Analog folgt für die zweite Gruppe  $y = 28$  und hieraus die gesuchten Zeiten.

### 570523 Lösung

10 Punkte

Die Anzahl der Treffer der fünf Spielerinnen seien mit  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  und  $e$  bezeichnet.

Aus (5) folgt:  $a = 9$ .

Daraus folgt mit (4):  $e = a - 2 = 7$  und  $c = e + 1 = 8$ .

Ziehen wir die Zahl der Treffer, die wir schon wissen, von den 35 Treffern ab, so ergibt sich:

$$35 - 9 - 8 - 7 = 11.$$

Also muss  $b + d = 11$  gelten.

Da nach (2) alle Mädchen verschiedene Trefferanzahlen haben, bleiben als Zerlegungen für die 11 in zwei verschiedene Summanden nur noch  $11 = 5 + 6$  und  $11 = 1 + 10$  übrig.

Nach (3) muss  $d$  kleiner sein als  $b$ . Damit gibt es zwei mögliche Trefferverteilungen:

$$a = 9, b = 10, c = 8, d = 1 \text{ und } e = 7 \text{ sowie}$$

$$a = 9, b = 6, c = 8, d = 5 \text{ und } e = 7.$$

In beiden Fällen treffen alle Aussagen zu, also ist eine eindeutige Zuordnung nicht möglich.

### 570524 Lösung

10 Punkte

*Teil a)* Sie erhält  $(4 \cdot 4 \cdot 4 = )$  64 kleine Würfel.

*Teil b)* Es ist nützlich, sich vorher zu überlegen, dass ein Würfel 6 Seitenflächen, 12 Kanten und 8 Ecken hat.

Weiterhin: Ein kleiner Würfel kann maximal drei farbige Flächen haben, wenn er ein Eckwürfel ist. Er hat keine farbigen Flächen, wenn er sich im Inneren des großen Würfels befindet.

Anzahl farbiger Flächen	Anzahl der kleinen Würfel dieser Sorte
3	Alle Eckwürfel: 8
2	Alle Würfel, die an den 12 Kanten, aber nicht an einer Ecke des großen Würfels liegen – das sind pro Kante 2 Würfel. Insgesamt gibt es davon $12 \cdot 2 = 24$ .
1	Alle Würfel auf den 6 Seitenflächen, die keine Kante des großen Würfels berühren – das sind pro Fläche $2 \cdot 2 = 4$ Würfel. Insgesamt gibt es davon $6 \cdot 4 = 24$ .
0	Alle inneren Würfel: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

Probe: Die Summe der Würfelanzahlen aller Sorten beträgt  $(8 + 24 + 24 + 8 = )$  64. Damit sind alle kleinen Würfel jeweils einer Sorte zugeordnet.

*Teil c)* Nein, Clara kann keinen roten Würfel bauen, weil sie dazu 8 Eckwürfel mit drei roten Seitenflächen benötigt. Es gibt aber nur einen Würfel mit drei roten Seitenflächen.

*Teil d)* Der größte Würfel ohne von außen sichtbare Farbflächen, den Clara bauen kann, hat wieder eine Kantenlänge von 4 cm, denn:

Da jeder kleine Würfel mindestens drei unbemalte Seitenflächen hat, die an einer Ecke zusammentreffen, kann sie vom ursprünglichen großen Würfel alle außenliegenden kleinen Würfel so umdrehen, dass die farbigen Seitenflächen nach innen zeigen.

## Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

---

Aufgabe 570521	<i>Insgesamt: 10 Punkte</i>
Teil a) .....	3 Punkte
Angabe der richtigen Lösung	2 Punkte
Begründung / Ausschluss anderer Lösungen	1 Punkt
Teil b) .....	3 Punkte
Angabe der richtigen Lösung	2 Punkte
Begründung / Ausschluss anderer Lösungen	1 Punkt
Teil c) .....	4 Punkte
Angabe der richtigen Lösung	1 Punkt
Begründung der Vollständigkeit / Ausschluss anderer Anordnungen	3 Punkte

---

Aufgabe 570522	<i>Insgesamt: 10 Punkte</i>
<i>Erste Gruppe</i>	
Ergebnis .....	2 Punkte
Herleitung .....	2 Punkte
Probe .....	1 Punkt
<i>Zweite Gruppe</i>	
Ergebnis .....	2 Punkte
Herleitung .....	2 Punkte
Probe .....	1 Punkt

---

Aufgabe 570523	<i>Insgesamt: 10 Punkte</i>
Zuordnung der Trefferanzahlen $a$ , $c$ und $e$ .....	3 Punkte
Herleitung der Trefferanzahlen $a$ , $c$ und $e$ .....	2 Punkte
Begründete Angabe einer möglichen Trefferanzahl für $b$ und $d$ .....	3 Punkte
Begründete Angabe der anderen möglichen Trefferanzahl für $b$ und $d$ .....	2 Punkte

---

Teil a) Korrekte Lösung .....	1 Punkt
Teil b) .....	5 Punkte
Je Sorte (siehe Tabelle) 1 Punkt	
Begründung der Vollständigkeit / Ausschluss anderer Sorten	1 Punkt
Teil c) Begründetes Ergebnis .....	2 Punkte
Teil d) .....	2 Punkte
Ergebnis	1 Punkt
Begründung	1 Punkt