Olympiadeklassen **11 − 12**

57. Mathematik-Olympiade
2. Runde (Regionalrunde)
Aufgaben

© 2017 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

571221

Für welche reellen Zahlen z gibt es positive ganze Zahlen a, b und c, die das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a + b + c &= 57\,, \\ a^2 + b^2 - c^2 &= z\,, \\ z \cdot c &= 2017 \end{aligned}$$

erfüllen? Man bestimme jeweils alle Lösungen (a, b, c) in Abhängigkeit von z.

571222

Auf einem Kreis k liegen n Punkte $P_1, \ldots, P_n$ so, dass durch keinen Punkt im Inneren des Kreises mehr als zwei der Verbindungsstrecken

$$\overline{P_1P_2}\,, \quad \overline{P_1P_3}\,, \quad \ldots\,, \quad \overline{P_1P_n}\,, \quad \ldots\,, \quad \overline{P_{n-1}P_n}$$

verlaufen.

a) Es sei zunächst $n = 6$. Man ermittle die Anzahl aller Dreiecke, deren Seiten auf den Verbindungsstrecken liegen und deren Ecken Schnittpunkte dieser Verbindungsstrecken im Inneren des Kreises sind.

b) Wie viele solche Dreiecke gibt es für $n = 7$?

c) Wie viele solche Dreiecke gibt es, wenn $n > 7$ eine beliebige positive ganze Zahl ist?

571223

Man beweise, dass die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte des Inkreises eines Dreiecks und eines seiner Ankreise vom Umkreis des Dreiecks halbiert wird.

Hinweis: Ein Kreis heißt Ankreis eines Dreiecks, wenn er eine Dreiecksseite von außen und die Verlängerungen der anderen beiden Dreiecksseiten berührt.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

571224

Man bestimme den kleinsten Wert, den das Produkt

$$p = \left(\frac{1}{a} - 1\right)\left(\frac{1}{b} - 1\right)\left(\frac{1}{c} - 1\right)\left(\frac{1}{d} - 1\right)$$

annehmen kann, wenn a, b, c und d positive reelle Zahlen mit $a + b + c + d = 1$ sind.