



© 2017 Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.

571021

Gegeben sind drei zerbeulte Kanister A, B und C. Es ist bekannt, dass Kanister A genau acht Liter, Kanister B genau fünf Liter und Kanister C genau drei Liter Fassungsvermögen hat. Keiner der Kanister besitzt eine Maßeinteilung. Es ist somit unmöglich, an unvollständig gefüllten Kanistern den Stand einer teilweisen Füllung abzulesen.

Trotzdem ist es durch Umfüllvorgänge beispielsweise möglich, von anfangs im Kanister A enthaltenen acht Litern Flüssigkeit zwei Liter abzumessen:

Umfüllvorgang	Inhalt A (8)	Inhalt B (5)	Inhalt C (3)
(Anfang)	8	0	0
$A \rightarrow B$	3	5	0
$B \rightarrow C$	3	2	3

Für das Umfüllen gelten dabei folgende Regeln: Beim Umfüllen wird nichts verschüttet. Ein Kanister wird entweder vollständig in einen anderen Kanister entleert, oder es wird genau so viel umgefüllt, bis der Zielkanister randvoll ist. Es wird keine Flüssigkeit weggeschüttet.

- a) Zeigen Sie, dass man bei einem Anfangsstand von acht Litern Flüssigkeit in Kanister A und leeren Kanistern B und C mit weniger als acht Umfüllvorgängen erreichen kann, dass sich gleichzeitig in einem der Kanister ein Liter und in einem anderen vier Liter Flüssigkeit befinden. Verwenden Sie zur Darstellung eine Tabelle nach obigem Muster.
- b) Dieseldieselkraftstoff wird traditionell aus Erdöl hergestellt, während Biodiesel aus Pflanzen erzeugt wird. Beide Kraftstoffarten sind mischbar, wobei die beiden Arten in jedem Gemisch gleichmäßig verteilt sind.

Der Kanister B sei anfangs mit fünf Litern Diesel, der Kanister C mit drei Litern Biodiesel gefüllt und der Kanister A sei leer.

Finden Sie eine Folge von Umfüllungen, bei der sich

- nach drei Umfüllvorgängen in Kanister A genau sechs Liter Gemisch und
- nach vier weiteren Umfüllvorgängen in den Kanistern A und B jeweils genau vier Liter Gemisch befinden.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

- c) Ermitteln Sie für Ihre Lösung von b)
- den Anteil an Biodiesel für die sechs Liter in Kanister A nach drei Umfüllungen und
 - jeweils den Anteil an Biodiesel für die vier Liter in Kanister A und in Kanister B nach der letzten Umfüllung
- (Angabe als gekürzte Brüche).

571022

Gegeben sind die beiden quadratischen Funktionen a und b mit den Gleichungen

$$a(x) = -2(x-2)(x-6) \quad \text{und} \quad b(x) = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{8}{3}x - \frac{14}{3}.$$

- a) Weisen Sie nach, dass beide Funktionen eine gemeinsame Nullstelle besitzen.
- b) Die Funktion b hat eine zweite Nullstelle. Bestimmen Sie diese.
- c) Eine quadratische Funktion c hat eine Nullstelle $x_1 = 2$ und ihr Graph den Scheitelpunkt $S_c(6, 7)$. Ermitteln Sie eine Gleichung für c .
- d) Weisen Sie nach, dass der Scheitelpunkt S_c des Graphen der Funktion c der Mittelpunkt der Strecke zwischen den Scheitelpunkten S_a und S_b der Graphen der Funktionen a und b ist.

571023

Wir sagen, zwei reelle Zahlen sind *krass verschieden*, wenn sie in keiner Nachkommastelle übereinstimmen. Beispielsweise sind die Zahlen $\frac{1}{4} = 0,25 = 0,25\bar{0} = 0,2500\dots$ und $\frac{1}{11} = 0,0\bar{9}$ nicht krass verschieden, da beide die gleiche dritte Nachkommastelle 0 haben. Die Zahlen $\frac{7}{30} = 0,2\bar{3}$ und $\frac{1}{8} = 0,125\bar{0}$ dagegen sind krass verschieden.

Wir betrachten nun Paare (a, b) ganzer Zahlen mit $a, b \geq 2$. Ein solches Paar nennen wir *gut*, wenn jede der Zahlen $\frac{1}{a}, \frac{2}{a}, \dots, \frac{a-1}{a}$ von jeder der Zahlen $\frac{1}{b}, \frac{2}{b}, \dots, \frac{b-1}{b}$ krass verschieden ist.

- a) Ist das Paar $(5, 7)$ gut?
- b) Bestimmen Sie alle guten Paare (a, b) mit $a = 2$.
- c) Bestimmen Sie alle guten Paare (a, b) .

Hinweis: Keine Dezimaldarstellung endet mit lauter Neunen.

571024

In einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit der Basis \overline{AB} und Basiswinkeln der Größe $\alpha < 45^\circ$ schneiden die Mittelsenkrechten der Schenkel \overline{AC} und \overline{BC} die Basis in den Punkten E und F .

- a) Angenommen, es gilt $\alpha = 30^\circ$. Weisen Sie nach, dass dann $|AE| = |EF| = |FB|$ gilt.
- b) Angenommen, es gilt $0 < \alpha < 45^\circ$. Zeigen Sie, dass die Umkreismittelpunkte der Dreiecke EBC und FCA auf dem Umkreis k des Dreiecks EFC liegen.