



© 2017 Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.

570921

Gegeben sind drei zerbeulte Kanister A, B und C. Es ist bekannt, dass Kanister A genau acht Liter, Kanister B genau fünf Liter und Kanister C genau drei Liter Fassungsvermögen hat. Keiner der Kanister besitzt eine Maßeinteilung. Es ist somit unmöglich, an unvollständig gefüllten Kanistern den Stand einer teilweisen Füllung abzulesen.

Trotzdem ist es durch Umfüllvorgänge beispielsweise möglich, von anfangs im Kanister A enthaltenen acht Litern Flüssigkeit zwei Liter abzumessen:

Umfüllvorgang	Inhalt A (8)	Inhalt B (5)	Inhalt C (3)
(Anfang)	8	0	0
$A \rightarrow B$	3	5	0
$B \rightarrow C$	3	2	3

Für das Umfüllen gelten dabei folgende Regeln: Beim Umfüllen wird nichts verschüttet. Ein Kanister wird entweder vollständig in einen anderen Kanister entleert, oder es wird genau so viel umgefüllt, bis der Zielkanister randvoll ist. Es wird keine Flüssigkeit weggeschüttet.

- Zeigen Sie, dass man bei einem Anfangsstand von acht Litern Flüssigkeit in Kanister A und leeren Kanistern B und C mit weniger als acht Umfüllvorgängen erreichen kann, dass sich gleichzeitig in einem der Kanister ein Liter und in einem anderen vier Liter Flüssigkeit befinden. Verwenden Sie zur Darstellung eine Tabelle nach obigem Muster.
- Dieseldieselkraftstoff wird traditionell aus Erdöl hergestellt, während Biodiesel aus Pflanzen erzeugt wird. Beide Kraftstoffarten sind mischbar, wobei die beiden Arten in jedem Gemisch gleichmäßig verteilt sind.

Der Kanister B sei anfangs mit fünf Litern Diesel, der Kanister C mit drei Litern Biodiesel gefüllt und der Kanister A sei leer.

Finden Sie eine Folge von Umfüllungen, bei der sich

- nach drei Umfüllvorgängen in Kanister A genau sechs Liter Gemisch und
- nach vier weiteren Umfüllvorgängen in den Kanistern A und B jeweils genau vier Liter Gemisch befinden.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

- c) Ermitteln Sie für Ihre Lösung von b)
- den Anteil an Biodiesel für die sechs Liter in Kanister A nach drei Umfüllungen und
 - jeweils den Anteil an Biodiesel für die vier Liter in Kanister A und in Kanister B nach der letzten Umfüllung
- (Angabe als gekürzte Brüche).

570922

Gegeben sind die beiden Funktionen a und b mit den Gleichungen

$$a(x) = -4 \cdot |x - 4| + 8 \quad \text{und} \quad b(x) = -|x - 8| + 6.$$

- a) Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen a und b in ein rechtwinkliges Koordinatensystem.
- b) Weisen Sie nach, dass beide Funktionen eine gemeinsame Nullstelle haben.
- c) Ermitteln Sie für die Funktion b alle weiteren Nullstellen.
- d) Ermitteln Sie reelle Zahlen p, q, r , für die die Funktion c mit der Gleichung

$$c(x) = p \cdot |x - q| + r$$

eine Nullstelle $x_1 = 2$ hat und ihren größten Wert 7 für $x_2 = 6$ annimmt.

- e) Ergänzen Sie im Koordinatensystem aus a) den Graphen der Funktion c .

570923

In einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit der Basis \overline{AB} und Basiswinkeln der Größe 30° schneiden die Mittelsenkrechten der Schenkel \overline{AC} und \overline{BC} die Basis in den Punkten E und F .

Weisen Sie nach, dass dann $|AE| = |EF| = |FB|$ gilt.

570924

Wir sagen, zwei reelle Zahlen sind *krass verschieden*, wenn sie in keiner Nachkommastelle übereinstimmen. Beispielsweise sind die Zahlen $\frac{1}{4} = 0,25 = 0,25\overline{0} = 0,2500\dots$ und $\frac{1}{11} = 0,\overline{09}$ nicht krass verschieden, da beide die gleiche dritte Nachkommastelle 0 haben. Die Zahlen $\frac{7}{30} = 0,2\overline{3}$ und $\frac{1}{8} = 0,125\overline{0}$ dagegen sind krass verschieden.

Wir betrachten nun Paare (a, b) ganzer Zahlen mit $a, b \geq 2$. Ein solches Paar nennen wir *gut*, wenn jede der Zahlen $\frac{1}{a}, \frac{2}{a}, \dots, \frac{a-1}{a}$ von jeder der Zahlen $\frac{1}{b}, \frac{2}{b}, \dots, \frac{b-1}{b}$ krass verschieden ist.

- a) Ist das Paar $(5, 7)$ gut?
- b) Bestimmen Sie alle guten Paare (a, b) mit $a = 2$.
- c) Bestimmen Sie alle guten Paare (a, b) .

Hinweis: Keine Dezimaldarstellung endet mit lauter Neunen.