Olympiadeklassen **11 – 12**

57. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Lösungen

571211 Lösung *10 Punkte*

Angenommen, für eine Zahl z existieren m und n mit den gewünschten Eigenschaften. Dann folgt durch Auflösen der Gleichungen (1) und (2) nach z

$$z = n^2 + m^4 = (n+1)^2 - 2^m\,, \tag{1}$$

also gilt wegen $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$ die Beziehung

$$m^4 + 2^m = 2n + 1\,.$$

Da $m > 0$ sein soll, ist 2^m gerade, und folglich muss m ungerade sein. Für jedes ungerade $m \geq 1$ kann man aus dieser Gleichung eindeutig ein ganzzahliges n bestimmen:

$$n = \frac{1}{2}\left(m^4 + 2^m - 1\right).$$

Einsetzen von m und n in (1) liefert für jedes ungerade m eine (ganze) Zahl z und damit eine Lösung des Gleichungssystems (1), (2). Zu untersuchen ist nun noch, für welche dieser Zahlen $z \leq 100\,000$ gilt.

Für $m = 1$ und $m = 3$ erhalten wir

$$\begin{aligned} m=1: &\quad m^4 + 2^m = 3 &\Rightarrow&\quad n = 1 &\Rightarrow&\quad z = 2\,,\\ m=3: &\quad m^4 + 2^m = 89 &\Rightarrow&\quad n = 44 &\Rightarrow&\quad z = 2017\,. \end{aligned}$$

Für $m \geq 5$ gilt $m^4 \geq 625 > 620$ und $2^m \geq 32 > 21$, also $2n + 1 = m^4 + 2^m > 641$. Daraus folgt $n > 320$ und schließlich $z > n^2 > 102\,400 > 100\,000$.

Es gibt also genau zwei Zahlen z mit der geforderten Eigenschaft, nämlich $z_1 = 2$ und $z_2 = 2017$.

Lösungsvariante: Für die kleinsten drei möglichen Werte für m gilt

$$\begin{aligned} m=1: &\ m^4 + 2^m = 3 \ \Rightarrow n = 1 \Rightarrow z = 2\,,\\ m=3: &\ m^4 + 2^m = 89 \ \Rightarrow n = 44 \Rightarrow z = 2\,017\,,\\ m=5: &\ m^4 + 2^m = 657 \ \Rightarrow n = 328 \Rightarrow z = 108\,209\,. \end{aligned}$$

Wegen der Monotonie ist für $m \geq 5$ folglich $z > 100\,000$. Es gibt somit genau zwei Zahlen z mit der geforderten Eigenschaft, nämlich $z_1 = 2$ und $z_2 = 2017$.

571212 Lösung *10 Punkte*

Die Eckpunkte des fünfzackigen Sterns sind $A = S$, B, C, $D = P$ und E. Mit Kleinbuchstaben sind jeweils die Flächeninhalte der Dreiecke bezeichnet, in denen sich der Buchstabe befindet (vergleiche Abbildung L 571212). Da die Dreiecke ABC und ADC dieselbe Grundseite $\overline{AC}$ und die gleiche Höhe zu dieser Grundseite haben, sind sie flächengleich. Daraus folgt, dass

$$f + a + g = a + g + c + b + \frac{1}{12}, \quad \text{also} \quad b + c = f - \frac{1}{12}$$

gilt.

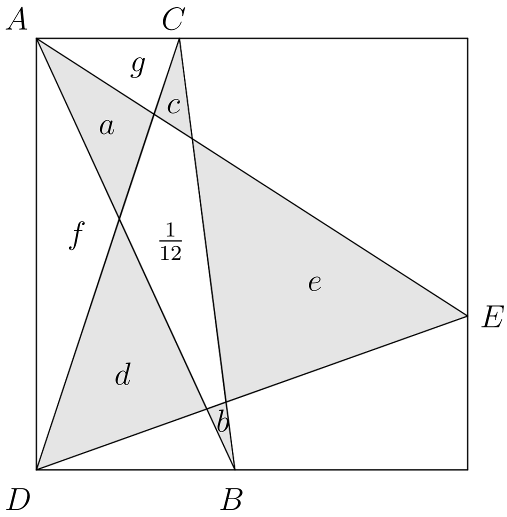
Im Dreieck ADE haben die Grundseite $\overline{AD}$ und die zugehörige Höhe die Länge 1, also hat das Dreieck ADE den Flächeninhalt $1/2$. Daraus folgt

$$a + d + e + f + \frac{1}{12} = \frac{1}{2}, \quad \text{also} \quad a + d + e + f = \frac{5}{12}$$

und weiter

$$a + b + c + d + e = a + d + e + (b + c) = a + d + e + f - \frac{1}{12} = \frac{5}{12} - \frac{1}{12} = \frac{1}{3}.$$

Die Summe der Flächeninhalte der grau gefärbten Dreiecke beträgt $1/3$.



L 571212

571213 Lösung *10 Punkte*

Für alle positiven Zahlen a, b, c mit $abc = 1$ und $b \leq c$ gilt

$$\begin{aligned}(a+1)(c+1) = ac + a + c + 1 &= \frac{1}{b} + a + c + 1 \geq \frac{1}{c} + a + c + 1 \\ > \frac{1}{c} + c + 1 &= \left(\frac{1}{\sqrt{c}} - \sqrt{c}\right)^2 + 3 \geq 3\,.\end{aligned}$$

Damit ist bewiesen, dass die Ungleichung der Aufgabenstellung erfüllt ist.

Lösungsvariante: Wegen $abc = 1$, $a, b, c > 0$ und $c \geq b$ gilt $ac^2 \geq 1$ und damit $a \geq 1/c^2$. Es folgt

$$(a+1)(c+1) \geq \left(\frac{1}{c^2} + 1\right)(1 + c) = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{c} + 1 + c > \frac{1}{c} + 1 + c\,.$$

Die Ungleichung $1/c + 1 + c \geq 3$ zeigt man schließlich wie in der 1. Lösung.

Bemerkung: Sobald die Fragestellung auf eine Ungleichung mit nur noch einer Variablen reduziert wurde, können natürlich auch die Methoden der Differentialrechnung zur Lösung verwendet werden.

Zum Beispiel wäre für die Ungleichung $1/c + 1 + c \geq 3$ zu zeigen, dass die Funktion F mit $F(c) = 1/c + 1 + c$ im Intervall zwischen 0 und 1 monoton fällt und auf dem Strahl für $c \geq 1$ monoton wächst. Folglich nimmt F dann an $c = 1$ ein globales Minimum an, und man hat

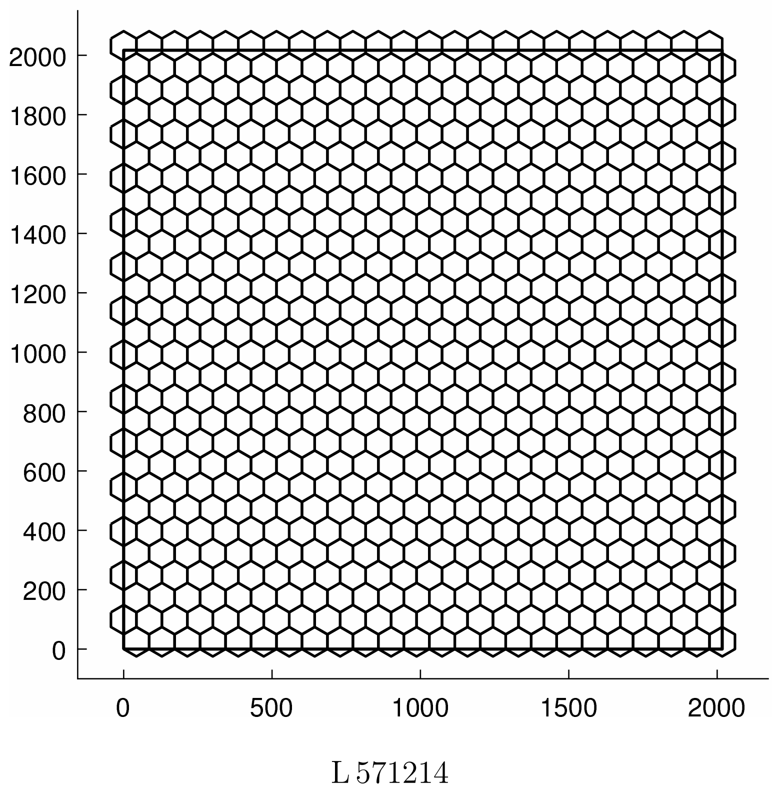
$$F(c) \geq F(1) = 3\,.$$

571214 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Wir zerlegen das Quadrat in 29×29 gleich große achsenparallele Quadrate mit der Seitenlänge $2017/29$.

Würden im Inneren oder auf dem Rand jedes dieser Quadrate höchstens 11 der Punkte liegen, so würden im Inneren oder auf dem Rand des großen Quadrats insgesamt nicht mehr als $11 \cdot 29 \cdot 29 = 9251$ Punkte liegen (Punkte, die auf dem Rand mehrerer kleiner Quadrate liegen, werden dabei mehrfach gezählt).

Aufgrund des Dirichlet'schen Schubfachprinzips muss mindestens eines der Quadrate also im Inneren oder auf dem Rand wenigstens 12 Punkte enthalten. Der Durchmesser des Umkreises dieses Quadrats beträgt $\sqrt{2} \cdot 2017/29$. Da wegen $41^2 = 1681 < 1682 = 2 \cdot 29^2$ die Abschätzung $41/29 < \sqrt{2}$ und damit $1/29 < \sqrt{2}/41$ gilt, gilt für den Durchmesser des Umkreises $\sqrt{2} \cdot 2017/29 < \sqrt{2} \cdot 2017\sqrt{2}/41 = 4034/41 < 100$. Es gibt folglich einen Kreis mit Durchmesser 100, in dessen Innerem mindestens 12 Punkte liegen.



L 571214

Teil b) Wir überdecken das Quadrat mit $24 \times 28 = 672$ regelmäßigen Sechsecken wie in Abbildung L 571214 gezeigt. Um zu gewährleisten, dass das Quadrat in horizontaler Richtung überdeckt ist, wird die Seitenlänge s aller Sechsecke so bestimmt, dass für die Länge $d = \sqrt{3}\, s$ ihrer kürzeren Diagonalen gilt

$$\left(23 + \frac{1}{2}\right) \cdot d = 2017\,.$$

Hieraus folgt

$$s = \frac{2 \cdot 2017}{47\sqrt{3}}\,. \tag{1}$$

Die vertikale Ausdehnung der von den Sechsecken vollständig überdeckten achsenparallelen Rechtecksfläche beträgt

$$13 \cdot 2s + 14 \cdot s + \frac{3}{2}s = \frac{83}{2}\, s = \frac{83}{47\sqrt{3}} \cdot 2017 \tag{2}$$

und ist wegen

$$\left(\frac{83}{47\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{83^2}{47^2 \cdot 3} = \frac{6889}{6627} > 1 \tag{3}$$

größer als 2017. Damit ist gezeigt, dass das Quadrat von den 672 regelmäßigen Sechsecken mit der Seitenlänge s vollständig überdeckt wird.

Wegen $14 \cdot 672 = 9408 < 10\,000$ muss wenigstens eines der Sechsecke im Inneren oder auf dem Rand mindestens 15 Punkte enthalten (Punkte, die auf dem Rand mehrerer Sechsecke liegen, werden dabei mehrfach gezählt). Der Umkreis dieses Sechsecks hat den Durchmesser $2s$. Wegen

$$s^2 = \frac{4034^2}{47^2 \cdot 3} = \frac{16\,273\,156}{6627} < \frac{16\,500\,000}{6600} = 2500 = 50^2 \tag{4}$$

gilt $s < 50$ und damit $2s < 100$.

Folglich liegen im Inneren des Kreises mit Durchmesser 100 um den Mittelpunkt dieses Sechsecks mindestens 15 Punkte.

Bemerkungen:

a) Bei dieser Aufgabe können alternativ auch numerische Berechnungen verwendet werden, um Abschätzungen wie (1)–(4) zu begründen.
b) Es gibt (insbesondere bei Teilaufgabe a)) verschiedene andere Zerlegungsmöglichkeiten, die ebenfalls zum Ziel führen.
c) Die Aufgabe ist vollständig gelöst, wenn nur Teilaufgabe b) betrachtet wird.

Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

Aufgabe 571211 *Insgesamt: 10 Punkte*

Ermittlung des Zusammenhangs zwischen m und n .... 3 Punkte
Beschreibung aller (ganzzahligen) Lösungen z .... 4 Punkte
Einschränkung auf das geforderte Intervall und Angabe der Lösungen .... 3 Punkte

Die Punktverteilung bezieht sich auf den angegebenen Lösungsvorschlag und ist bei abweichenden Lösung(sversuch)en sinngemäß anzupassen.

Aufgabe 571212 *Insgesamt: 10 Punkte*

Idee, die Dreiecke ABC und ADC zu betrachten .... 2 Punkte
Term für $b + c$ .... 3 Punkte
Term für $a + d + e + f$ .... 3 Punkte
Zusammenfassen der Terme .... 2 Punkte

Aufgabe 571213 *Insgesamt: 10 Punkte*

Erste Abschätzungen und Einbringen von b .... 2 Punkte
Weitere Umformungen bis zur Reduktion auf eine Ungleichung für eine Variable .... 4 Punkte
Beweis der Ungleichung für eine Variable .... 4 Punkte

Aufgabe 571214 *Insgesamt: 10 Punkte*

Die folgende Aufteilung geht von der Annahme aus, dass die Aufgabe ausschließlich durch Betrachtung von Teil b) gelöst wurde. Wird nur Teil a) gelöst, sollten maximal 5 Punkte vergeben werden, die anteilig ebenfalls entsprechend der nachfolgenden Aufteilung verteilt werden.
Ansatz einer Überdeckung des Quadrates durch geeignete Flächen .... 2 Punkte
Nachweis der Überdeckung des Quadrates .... 4 Punkte
Schubfachschluss .... 2 Punkte
Abschätzung des Radius und Schluss auf Behauptung .... 2 Punkte