Olympiadeklassen **9–10**

57. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Lösungen

571011 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Bernd hat zwei Möglichkeiten, den Viererstapel zu zerlegen: erstens in einen Einer- und einen Dreierstapel und zweitens in zwei Zweierstapel.

Im ersten Fall muss Inge den Einerstapel entfernen und den Dreierstapel in einen Einer- und einen Zweierstapel zerlegen. Bernd gewinnt nun, indem er den Einerstapel entfernt und den Zweierstapel zerlegt. Inge kann bei zwei Einerstapeln keinen gültigen Zug mehr ausführen.

Im zweiten Fall gewinnt Inge. Sie entfernt einen der Zweierstapel und zerlegt den zweiten in zwei Einerstapel. Bernd kann dann keinen gültigen Zug mehr ausführen.

Teil b) Hat der Stapel eine ungerade Größe, so kann Inge den Sieg erzwingen, ansonsten gewinnt Bernd (bei einer geraden Größe des Stapels).

Beweis: Haben die zwei Stapel auf dem Tisch beide eine ungerade Größe (mindestens eine größer als eins), so entsteht im nächsten Zug ein Stapel gerader Größe, der im übernächsten Zug (immer möglich) wieder in zwei Stapel ungerader Größe zerlegt werden kann.

Die Gewinnstrategie ist für beide gleich und besteht bei vorliegenden Stapeln unterschiedlicher Parität darin, den Stapel ungerader Größe zu entfernen und den Stapel gerader Größe in zwei Stapel ungerader Größe zu zerlegen.

Bei jedem Zug werden die Stapel kleiner, daher endet das Spiel nach endlich vielen Zügen. Da jemand, der die Gewinnstrategie kennt und spielen kann (er findet einen geraden und einen ungeraden Stapel vor), stets einen geraden Stapel vorfindet und jemand, der sie nicht spielen kann (er findet zwei ungerade Stapel vor), stets einen geraden Stapel erzeugt, endet das Spiel mit zwei Stapeln aus nur einer Karte mit Bernd am Zug, wenn der Ausgangsstapel ungerade war, und Inge am Zug, wenn er gerade war.

Lösungsvariante:

Nach dem ersten Zug von Bernd wird die Gesamtzahl der Karten mit jedem Zug immer kleiner, weil stets ein Stapel entfernt wird. Daher endet das Spiel nach endlich vielen Zügen.

Hat der Startstapel eine gerade Größe, kann Bernd den Sieg erzwingen. Er zerlegt dazu den Stapel der Größe $2\,k$ (mit $k > 0$) in einen Stapel der Größe 1 und einen Stapel der Größe $2\,k-1$. Ist $2\,k-1 = 1$, dann hat Inge verloren. Andernfalls muss Inge den Einerstapel entfernen und den Stapel der Größe $2\,k-1$ zerlegen. Dabei entsteht zwangsläufig ein Stapel gerader Größe. Bernd kann diesen wie in seinem ersten Zug verarbeiten, nachdem er vorher den anderen Stapel ungerader Größe entfernt hat. Das Spiel läuft also weiter, bis Inge irgendwann zwei Einerstapel vorfindet und damit verliert.

Hat der Startstapel eine ungerade Größe, kann Inge den Sieg erzwingen. Denn Bernd hat in diesem Fall bei seinem ersten Zug keine andere Wahl, als einen Stapel gerader Größe zu erzeugen. Anschließend ist Inge am Zug und kann sich nun verhalten, wie sich (im obigen Fall eines Startstapels gerader Größe) Bernd verhalten hätte.

<u>571012 Lösung</u> *10 Punkte*

Es gilt $240 = 1 \cdot 2^4 \cdot 3 \cdot 5$ und

$$\left(n^2+n\right) \cdot \left(m^2-1\right) = n \cdot (n+1) \cdot \left(m^2-1\right) .$$

Wir bestimmen zunächst alle ganzzahligen n, für die $n^2+n = n\cdot(n+1)$ ein Teiler von 240 ist. Wegen $|n\cdot(n+1)| \geq 16 \cdot 17 > 240$ für $n > 15$ und für $n < -16$ können wir unsere Untersuchung auf die ganzen Zahlen $n \in \mathbb{Z}$ mit $-16 \leq n \leq 15$ beschränken. Unter diesen ist $n \cdot (n+1)$ genau für

$$n \in \{-16, -6, -5, -4, -3, -2, 1, 2, 3, 4, 5, 15\}$$

ein Teiler von 240.

Probiert man für diese Teiler durch, wann sich $z = \frac{240}{n\cdot(n+1)}$ in der Gestalt m^2-1 darstellen lässt, also $z+1$ das Quadrat einer ganzen Zahl ist, dann bleiben genau die Fälle

$$(n,m) \in \{(-6,\pm 3), (-2,\pm 11), (1,\pm 11), (5,\pm 3)\}$$

übrig. Das systematische Vorgehen und die Beachtung aller Möglichkeiten stellen sicher, dass alle Lösungen gefunden wurden. Für diese gilt

$$n-m \in \{-9, -3, -13, 9, -10, 12, 2, 8\} .$$

Die kleinste Differenz $n-m=-13$ ergibt sich dabei genau für $n=-2$ und $m=11$, die größte Differenz $n-m=12$ für $n=1$ und $m=-11$.

Lösungsvariante: Da $n^2+n = n\,(n+1)$ das Produkt aufeinanderfolgender ganzer Zahlen und m^2-1 der Vorgänger einer Quadratzahl ist, muss 240 in zwei Faktoren mit je einer dieser Eigenschaften zerlegt werden.

Die Vorgänger m^2-1 der Quadratzahlen, die höchstens gleich 240 sind, lauten

$$0, 3, 8, 15, 24, 35, 48, 63, 80, 99, 120, 143, 168, 195, 224\,.$$

Davon sind nur die Zahlen $3, 8, 15, 24, 48, 80$ und 120 Teiler von 240, und die Quotienten $\frac{240}{m^2-1}$ in entsprechender Reihenfolge lauten $80, 30, 16, 10, 5, 3, 2$.

Davon wiederum lassen sich nur die Zahlen 30 und 2 als Produkt aufeinanderfolgender ganzer Zahlen darstellen: $30 = (-6)\cdot(-5) = 5\cdot 6$ und $2 = (-2)\cdot(-1) = 1\cdot 2$.

Für m und n folgt: $n \in \{-6, 5, -2, 1\}$ und $m \in \{-3, 3, -11, 11\}$. Beachtet man die einander zugeordneten Zahlen, so folgen der oben ermittelte kleinste und größte Wert für $n-m$.

<u>571013 Lösung</u> *10 Punkte*

Jede Zahl n mit $Q(n) = 57$ hat wenigstens 7 Stellen, denn die höchstens 6-stellige Zahl mit der größten Quersumme 999 999 hat die Quersumme $6\cdot 9 = 54 < 57$. Die kleinste Zahl mit $Q(n) = 57$ ist 3 999 999.

Da die Zahl 57 die Primfaktorenzerlegung $57 = 3 \cdot 19$ besitzt, ist eine Zahl genau dann durch 57 teilbar, wenn sie durch 3 und durch 19 teilbar ist. Die Zahl 3 999 999 ist wie alle anderen Zahlen mit der Quersumme 57 zwar durch 3 teilbar, aber sie ist kein Vielfaches von 19.

Die nächstgrößeren Zahlen mit der Quersumme 57 sind 4 899 999, 4 989 999, 4 998 999, 4 999 899, 4 999 989, 4 999 998 (alle nicht durch 19 teilbar); es folgen 5 799 999, 5 889 999, 5 898 999 und 5 899 899. Von denen wiederum ist nur $m_1 = 5\,899\,899$ durch 57 teilbar (es gilt $5\,899\,899 = 57 \cdot 103\,507$).

Es gibt also mindestens eine ganze Zahl, die ebenso wie ihre eigene Quersumme durch 57 teilbar ist. Die obige Vorgehensweise stellt sicher, dass 5 899 899 die kleinste positive ganze Zahl mit der geforderten Eigenschaft ist.

Es gibt weitere Zahlen mit der geforderten Eigenschaft, etwa die durch Aneinanderhängen von zwei Exemplaren vom m_1 entstehende Zahl $m_2 = 58\,998\,995\,899\,899$, denn es gilt

$$58\,998\,995\,899\,899 = 57 \cdot 1\,035\,070\,103\,507 \quad \text{und} \quad Q(m) = 2 \cdot 57 = 114\,.$$

Eine weitere Lösung ist die Zahl 5757. . .5757, die durch 57-faches Aneinanderreihen der Zahl 57 entsteht. Sie lässt sich als Produkt $57 \cdot 1010\ldots101$ schreiben und ist daher durch 57 teilbar. Die Quersumme ist $(5 + 7) \cdot 57$ und somit ebenfalls durch 57 teilbar.

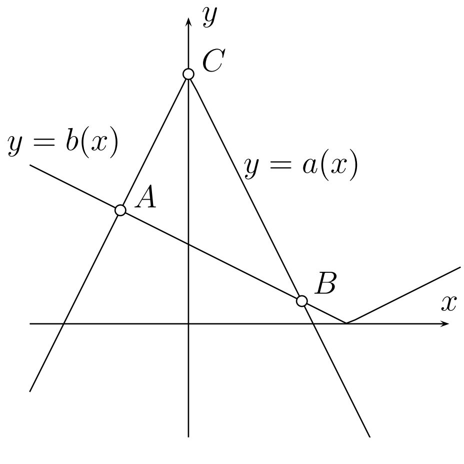
Es gibt unendlich viele Lösungen. Weitere Lösungen findet man beispielsweise durch Anhängen von Nullen an schon gefundene Lösungen sowie durch weiteres systematisches Probieren, eventuell auch unter Zuhilfenahme von Computerprogrammen.

<u>571014 Lösung</u> *10 Punkte*

Erste Lösung:

Teil a) Es gilt $|x| = x$ für $x \geq 0$ und $|x| = -x$ für $x < 0$. Somit lässt sich a für $x < 0$ durch die lineare Funktion $a_1(x) = 2\,x + 11$ und für $x \geq 0$ durch die lineare Funktion $a_2(x) = -2\,x + 11$ beschreiben. Ebenso lässt sich b abschnittweise definieren als $b_1(x) = -\frac{1}{2}\,(x-7)$ für $x < 7$ bzw. als $b_2(x) = \frac{1}{2}\,(x - 7)$ für $x \geq 7$. Diese Erkenntnis oder die Verwendung entsprechender Wertetabellen ermöglichen die Darstellung der Graphen entsprechend der Abbildung L 571014 a.

Hinweis: Auf den meisten Taschenrechnern kann man z. B. die Funktion a direkt in der Form `-2*abs(x)+11` eingeben.



L 571014 a

Teil b) Zunächst wird bestimmt, in welchem Intervall die x-Koordinaten möglicher Schnittpunkte von a und b nicht liegen können.

Für $x \geq 7$ gilt: $a(x) = -2\,x + 11 \leq -3$ und $b(x) = \frac{1}{2} \cdot (x - 7) \geq 0$. Im betrachteten Intervall kann es also keine Schnittpunkte geben.

Wenn es Schnittpunkte gibt, dann liegen sie auf dem Teil des Graphen von b, der durch $b_1(x) = -\frac{1}{2}\,(x-7)$ für $x < 7$ beschrieben wird. Zur Bestimmung von Schnittpunktskoordinaten werden zwei Gleichungssysteme gelöst, indem die Funktionsgleichungen von b_1 und a_1 bzw. von b_1 und a_2 betrachtet werden. Bei sich ergebenden Lösungen ist zu prüfen, ob die Bedingung $x < 7$ für die x-Koordinate erfüllt ist und ob die jeweilige Lösung zum entsprechenden Definitionsbereich von a_1 bzw. a_2 passt. Die Gleichungssysteme

$$y = 2\,x + 11 \quad \text{und} \quad y = -\frac{1}{2}\,(x-7) \tag{1}$$

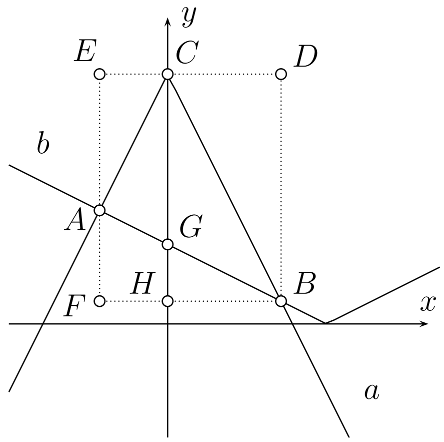
bzw.

$$y = -2\,x + 11 \quad \text{und} \quad y = -\frac{1}{2}\,(x-7) \tag{2}$$

ergeben jeweils genau eine Lösung: aus (1) folgt $x = -3$, $y = 5$ und der zugehörige Punkt $A(-3,5)$ bzw. aus (2) folgt $x = 5$, $y = 1$ mit $B(5,1)$. Die x-Koordinaten von A und B sind beide kleiner als sieben und haben das passende Vorzeichen. A und B sind daher die gesuchten Schnittpunkte der Graphen von a und b.

Teil c) Haben zwei sich schneidende Geraden die Anstiege m_1 und m_2, dann stehen sie genau dann senkrecht aufeinander, wenn $m_1 = -\frac{1}{m_2}$ gilt. Die Anstiege von a_1 und b_1 erfüllen mit ihren Werten 2 und $-\frac{1}{2}$ diese Bedingung. Also ist der Innenwinkel des Dreiecks ABC bei A ein rechter Winkel.

Lösungsvariante für Teil c): Da der Graph von a die y-Achse bei $a(0) = 11$ schneidet, hat der Punkt C die Koordinaten $C(0,11)$. Über den Seiten des Dreiecks ABC lassen sich jeweils nach außen rechtwinklige Dreiecke errichten, deren Katheten parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen. Aus den Koordinaten der Punkte A, B und C ergibt sich, dass die Punkte D, E und F die Koordinaten $D(5,11), E(-3,11)$ und $F(-3,1)$ besitzen (siehe Abbildung L 571014 b).



L 571014 b

Aus den daraus resultierenden Seitenlängen $|AF| = 4$ und $|FB| = 8$ folgt nach dem Satz des Pythagoras

$$|AB| = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80}\,.$$

Weiterhin gilt:

$$|AC| = \sqrt{|AE|^2 + |EC|^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45}$$

und

$$|BC| = \sqrt{|BD|^2 + |CD|^2} = \sqrt{10^2 + 5^2} = \sqrt{125}\,.$$

Für die drei Seitenlängen $|AB| = \sqrt{80}$, $|AC| = \sqrt{45}$ und $|BC| = \sqrt{125}$ gilt die Beziehung

$$|AB|^2 + |AC|^2 = 80 + 45 = 125 = |BC|^2\ ,$$

womit nach der Umkehrung des Satzes des Pythagoras das Dreieck ABC rechtwinklig ist mit dem rechten Winkel bei A.

Weitere Lösungsvariante für Teil c): Mit den obigen Punktbezeichnungen gilt:

Die Dreiecke AFB und CEA sind ähnlich, weil sie je einen rechten Winkel haben und die Verhältnisse der Kathetenlängen mit

$$|BF| : |FA| = 8 : 4 = 2 : 1 \quad \text{bzw.} \quad |AE| : |EC| = 6 : 3 = 2 : 1$$

gleich sind. Daher stimmen sie in der Größe der Innenwinkel überein, und zwar wegen der obigen Streckenverhältnisse mit $|\sphericalangle ECA| = |\sphericalangle FAB|$. Da F, A und E in dieser Reihenfolge auf einer Geraden liegen, folgt

$$|\sphericalangle BAC| = 180^\circ - |\sphericalangle CAE| - |\sphericalangle FAB| = 180^\circ - (|\sphericalangle CAE| + |\sphericalangle ECA|) = 90^\circ ,$$

wobei die letzte Gleichung wegen der Innenwinkelsumme im rechtwinkligen Dreieck CEA gilt.

Weitere Lösungsvariante für Teil c): Wir führen die Punkte $G\left(0, \frac{7}{2}\right)$ und $H(0, 1)$ ein (siehe Abbildung L 571014 b).

Die Dreiecke AFB und CEA sind ähnlich, weil sie je einen rechten Winkel haben und die Verhältnisse der Kathetenlängen mit

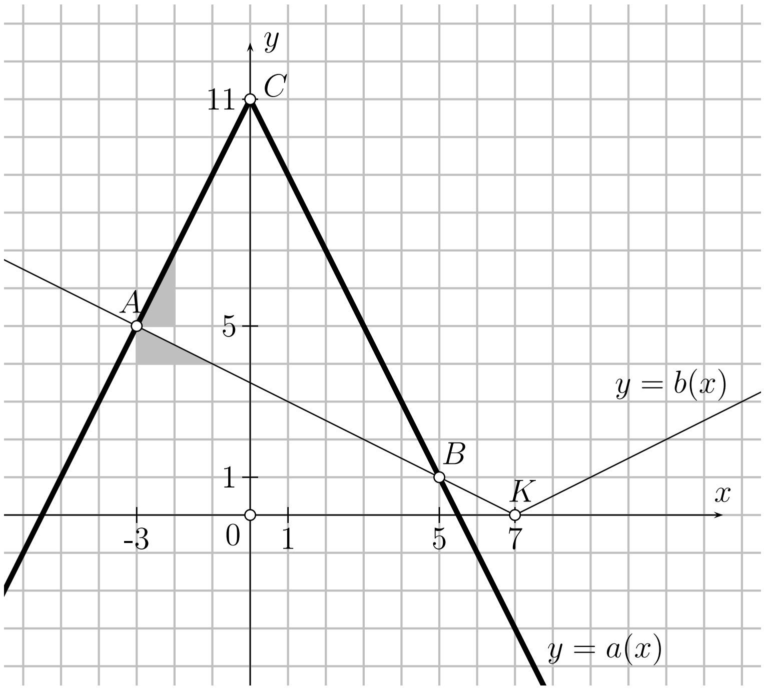
$$|BF| : |FA| = 8 : 4 = 2 : 1 \quad \text{bzw.} \quad |AE| : |EC| = 6 : 3 = 2 : 1$$

gleich sind. Zu beiden Dreiecken ist das Dreieck GHB ähnlich, weil es auch einen rechten Winkel und mit dem Dreieck AFB einen weiteren gemeinsamen Winkel hat. Das Teildreieck AGC hat nach dem Wechselwinkelsatz eine gemeinsame Winkelgröße mit dem Dreieck CEA und nach dem Scheitelwinkelsatz eine andere gemeinsame Winkelgröße mit dem Dreieck GHB.

Damit ist das Dreieck AGC nach dem Hauptähnlichkeitssatz zu allen drei anderen genannten Dreiecken ähnlich und besitzt wie diese einen rechten Winkel. Dieser liegt beim Punkt A und ist zugleich ein Innenwinkel des Dreiecks ABC.

Zweite Lösung:

Teil a)



L 571014 c

Teil b) Der Graph der Funktion a besteht aus zwei Strahlen, die vom Schnittpunkt $C(0, 11)$ des Graphen von a mit der y-Achse ausgehen und je Kästchen nach rechts bzw. links zwei Kästchen nach unten verlaufen, da der veränderliche Summand $-2\ |x|$ von $a(x) = -2\ |x| + 11$ gerade der (-2)-fache Abstand von x zur 0 ist. Er geht daher auch durch den Punkt $A(-3, 5)$ und den Punkt $B(5, 1)$.

Der Graph der Funktion b besteht aus zwei Strahlen, die von dem Punkt $K(7, 0)$ ausgehen und je zwei Kästchen nach rechts bzw. links und genau ein Kästchen nach oben verlaufen, da $b(x)$ genau den halben Abstand von x zur 7 liefert. Der Strahl nach links geht daher auch durch die Punkte $A(-3, 5)$ und $B(5, 1)$, weswegen dies die gesuchten Punkte sind. Der Strahl nach rechts schneidet die beiden Strahlen des Graphen von a nicht, da er schon oberhalb des Strahls von a nach rechts beginnt und bei seinem Verlauf im Gegensatz zu diesem an Höhe gewinnt.

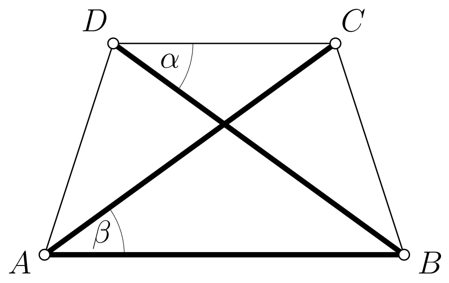
Damit sind A und B die einzigen Schnittpunkte der beiden Funktionsgraphen.

Teil c) Zusätzlich sind damit die in Abbildung L 571014 c grau markierten Anstiegsdreiecke rechtwinklig mit gleich langen einander in gleichem Umlaufsinn entsprechenden Katheten und sind daher nach Kongruenzsatz (sws) kongruent. Die kurzen Katheten stehen in A senkrecht aufeinander.

Das Anstiegsdreieck des Graphen von b bei A geht daher durch Drehung um 90° in ein Anstiegsdreieck des Graphen von a bei A über. Daher ist das Dreieck ABC rechtwinklig mit rechtem Winkel bei A.

571015 Lösung *10 Punkte*

Erste Lösung:



L 571015 a

Wir führen folgende Bezeichnungen ein: $\alpha = |\sphericalangle BDC|$, $\beta = |\sphericalangle BAC|$. Das Dreieck BCD ist gleichschenklig mit der Spitze in C, seine Basiswinkel haben deshalb die Größe α, also gilt $\alpha = |\sphericalangle CBD|$.

Die Dreiecke CAB und ABD stimmen in allen drei Seiten überein und sind somit kongruent; einander entsprechende Winkel sind gleich groß. Daher gilt $|\sphericalangle DBA| = \beta$.

Die beiden Winkel $\sphericalangle DBA$ und $\sphericalangle BDC$ sind Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen und demzufolge gilt

$$\alpha = \beta\,.$$

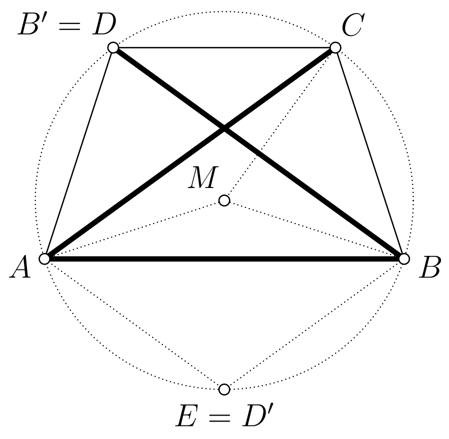
Wegen der Gleichschenkligkeit des Dreiecks CAB sind die beiden Basiswinkel gleich groß und somit gilt $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle CBA| = \alpha + \beta = 2\,\alpha$. Die Innenwinkelsumme im Dreieck CAB summiert sich damit zu

$$\alpha + 2\,\alpha + 2\,\alpha = 180°\,.$$

Daraus folgt $\alpha = \beta = 36°$. Für den Innenwinkel $\sphericalangle DCB$ des Dreiecks BCD ergibt sich wegen der Innenwinkelsumme $|\sphericalangle DCB| = 180° - 2\,\alpha = 108°$. Die Dreiecke BCD und CDA stimmen in allen drei Seiten überein und sind daher kongruent; ihre einander entsprechenden Innenwinkel sind gleich groß. Die gesuchten Innenwinkelgrößen sind somit

$$|\sphericalangle BAD| = \alpha + \beta = |\sphericalangle CBA| = 72° \quad \text{und} \quad |\sphericalangle DCB| = |\sphericalangle ADC| = 108°\,.$$

Zweite Lösung:



L 571015 b

Wir führen eine Drehung durch, bei der das Dreieck CAB (siehe Abbildung L 571015 b) um seinen Umkreismittelpunkt M um den Winkel $\sphericalangle AMB$ gedreht wird, so dass A in B überführt wird. Wegen der Kongruenz der Dreiecke BMA und AMC (sie stimmen in allen drei Seiten überein, sind also nach dem Kongruenzsatz (sss) kongruent) wird dabei auch C in A überführt. Die Dreiecke CAB und ABD sind nach Voraussetzung und nach dem Kongruenzsatz (sss) kongruent. Der Bildpunkt B' von B fällt daher mit D zusammen.

Der Punkt D wird weiterhin auf einen Punkt E auf dem Umkreis abgebildet. Der Punkt E hat zu A und B die gleichen Abstände wie D zu C und A, weil das Dreieck ACD auf das Dreieck BAE abgebildet wird. Daher gilt $|DA| = |AE| = |EB|$. Weiterhin liegt E auf der anderen Seite der Sehne $\overline{AB}$ wie C und D.

Damit ist das Fünfeck $AEBCD$ ein nicht überschlagenes gleichseitiges Sehnenfünfeck. Es ist daher regelmäßig und für die Winkel als Innenwinkel eines regelmäßigen Fünfecks gilt $|\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle DCB| = 108°$.

Da sich im Sehnenviereck gegenüberliegende Winkel zu 180° ergänzen, folgt $|\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle BAD| = 72°$.

571016 Lösung *10 Punkte*

Sind zwei positive reelle Zahlen a, b gegeben, so gibt es genau dann einen bzw. zwei Punkte P mit $|PA| = a$ und $|PB| = b$, wenn die Kreise um A mit dem Radius a und um B mit dem Radius b sich berühren bzw. schneiden. Dafür müssen die Dreiecksungleichungen

$$\begin{aligned} a + b &\geq 7, \\ a + 7 &\geq b, \\ b + 7 &\geq a \end{aligned} \tag{1}$$

erfüllt sein. Wenn in einer der drei Ungleichungen Gleichheit gilt, dann ist der Punkt P eindeutig bestimmt und liegt auf der Geraden AB. Anderenfalls gibt es genau zwei solche Punkte P, und sie liegen symmetrisch bezüglich der Geraden AB.

Teil a) Die Anzahl derartiger Punkte P, wenn $|PA|$ und $|PB|$ gegeben sind, ergibt sich gemäß folgender Tabelle.

		$\lvert PA\rvert$		
		4	5	12
	4	2	2	0
$\lvert PB\rvert$	5	2	2	1
	12	0	1	2

Es gibt also 12 solche Punkte P.

Teil b) Damit es 18 derartige Punkte P geben kann, müssen 5, x und y paarweise verschieden sein und alle Dreiecksungleichungen (1) für $a, b \in \{5, x, y\}$ strikt gelten. Oder anders ausgedrückt: Um A und um B gibt es je drei verschiedene Kreise, die sich paarweise in genau zwei Punkten schneiden.

Dies ist genau dann der Fall, wenn die folgenden Ungleichungen alle erfüllt sind:

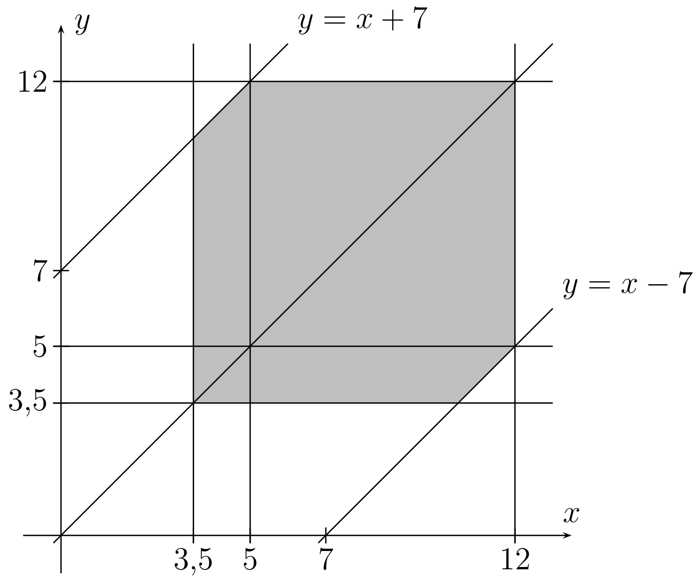
$$\begin{array}{rrr}
x \neq y, & x \neq 5, & y \neq 5, \\
5+5>7, & 5+7>5, & 5+7>5, \\
x+x>7, & x+7>x, & x+7>x, \\
y+y>7, & y+7>y, & y+7>y, \\
5+x>7, & 5+7>x, & x+7>5, \\
5+y>7, & 5+7>y, & y+7>5, \\
x+y>7, & x+7>y, & y+7>x.
\end{array}$$

Einige dieser Ungleichungen sind wegen $x, y > 0$ trivialerweise erfüllt; streicht man diese weg und vereinfacht die übrigen, so erhält man:

$$\begin{array}{llll}
x \neq y, & x \neq 5, & y \neq 5, & \\
12 > x > \frac{7}{2}, & 12 > y > \frac{7}{2}, & x+7>y, & y+7>x.
\end{array}$$

Die gesuchte Punktmenge M besteht daher aus allen Punkten, die zwischen den parallelen Geraden $y = x + 7$ und $y = x - 7$ und ebenfalls zwischen den parallelen Geraden $x = \frac{7}{2}$ und $x = 12$ sowie zwischen den parallelen Geraden $y = \frac{7}{2}$ und $y = 12$ liegen, und zwar jeweils ohne die begrenzenden Geraden, und die außerdem nicht auf den Geraden liegen, die durch die Gleichungen $x = y$, $x = 5$ und $y = 5$ gegeben sind.

Die Menge M ist ein Sechseck ohne Rand, abzüglich der drei Strecken, in denen es von den genannten Geraden geschnitten wird (siehe Abbilung L 571016).



L 571016

Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

Aufgabe 571011 — *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a) .... 4 Punkte

Vollständige Betrachtung der beiden Fälle je 2 Punkte

Teil b) .... 6 Punkte

Erkennen und Beweisen der Gewinnstrategie 4 Punkte (korrekte Bearbeitung weiterer Spezialfälle maximal 2 Punkte)
Vollständige Beantwortung der Frage 2 Punkte

Aufgabe 571012 — *Insgesamt: 10 Punkte*

Angabe der beiden gesuchten Werte .... 4 Punkte

Bestimmung aller Lösungen und Nachweis der Vollständigkeit .... 6 Punkte

Werden nicht alle Lösungen bestimmt, so maximal 2 Punkte

Aufgabe 571013 — *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a) Angabe von zwei Beispielen und Nachweis der geforderten Eigenschaften .... 6 Punkte

Falls nur die Teilbarkeit der Quersummen erfüllt ist, maximal 2 Punkte

Teil b) Angabe der kleinsten Zahl, Begründung und Nachweis der beiden Eigenschaften .... 4 Punkte

Aufgabe 571014 — *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a) .... 2 Punkte

Es werden auch Computerdarstellungen akzeptiert, je 1 Punkt

Teil b) Angabe der entsprechenden Funktionsterme, Bestimmung der Schnittpunkte .... 4 Punkte

Teil c) Nachweis der Rechtwinkligkeit .... 4 Punkte

Aufgabe 571015 *Insgesamt: 10 Punkte*

Angabe der gesuchten Winkel .... 2 Punkte
Bestimmung kongruenter Dreiecke, Schluss auf gleich große Winkel .... 3 Punkte
Bestimmung zweier unabhängiger Gleichungen für eingeführte Winkel .... 4 Punkte
Lösen des Gleichungssystems .... 1 Punkt

Aufgabe 571016 *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a) .... 4 Punkte
Ergebnis 1 Punkt
Begründung, zum Beispiel anhand einer Zeichnung, 3 Punkte
Teil b) .... 6 Punkte
Beispiele und zugehörige Zeichnungen maximal 2 Punkte