Olympiadeklasse 8

57. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Lösungen

570811 Lösung *8 Punkte*

Teil a) Ein Sommerheft der Schülerzeitung kostete 1,20 €. Die dreifache Anzahl an Heften kostete im Herbst zusammen nur das Doppelte, also kosteten drei Herbsthefte 2,40 €.

Daher kostete ein Herbstheft 0,80 €.

Teil b) Ein Winterheft möge weniger als ein Herbstheft kosten. Dann kosten je vier Winterhefte zusammen weniger als $(4 \cdot 0{,}80\,€ =)$ 3,20 € und daher weniger als $(3 \cdot 1{,}20\,€ =)$ 3,60 €, was das Dreifache des Preises eines Sommerheftes ist. Folglich können nicht viermal so viele Winter- wie Sommerhefte dreimal so viele Einnahmen im Vergleich zu den Sommerheften ergeben, wenn die Winterhefte weniger als die Herbsthefte kosten.

Die Behauptung des Schülers ist also falsch.

Lösungsvariante: Es seien a die Anzahl der verkauften Sommerhefte und h Euro der Preis des Herbstheftes.

Teil a) Da ein Sommerheft 1,20 € kostete, waren $a \cdot 1{,}20\,€$ die Einnahmen aus dem Sommerheftverkauf. Da nach Voraussetzung dreimal so viele Herbsthefte wie Sommerhefte verkauft wurden, waren $3 \cdot a \cdot h\,€$ die Einnahmen aus dem Verkauf der Herbsthefte. Da nach Voraussetzung die Einnahmen durch das Herbstheft doppelt so hoch wie die durch das Sommerheft sind, gilt $2 \cdot a \cdot 1{,}20 = 3 \cdot a \cdot h$, daher $2 \cdot 1{,}20 = 3 \cdot h$ und schließlich $h = 0{,}80$. Die Herbsthefte kosteten also 0,80 €.

Teil b) Angenommen, die Behauptung des Schülers stimmt. Dann erzielt man beim Verkauf von vier Winterheften die gleichen Einnahmen wie beim Verkauf von drei Sommerheften, also $(3 \cdot 1{,}20\,€ =)$ 3,60 €. Folglich würde ein Winterheft $(3{,}60\,€ : 4 =)$ 0,90 € kosten. Ein Herbstheft kostet nach Lösung der Teilaufgabe a) 0,80 € und damit weniger als ein Winterheft. Das ist aber ein Widerspruch zur Behauptung des Schülers, wonach das Winterheft weniger kosten sollte als das Herbstheft. Die Behauptung des Schülers ist also falsch.

570812 Lösung *10 Punkte*

Teil a) 1 Kreuzer könnte 4 Pfennig wert sein und 1 Gulden könnte 60 Kreuzer wert sein.

Teil b) Oberhalb des Summendoppelstriches stehen $(4 + 1 + 2 =)$ 7 Gulden, $(27 + 36 + 43 + 8 + 41 =)$ 155 Kreuzer und $(2 + 1 + 3 + 3 + 1 =)$ 10 Pfennig. Der Wert von 7 Gulden ist $(7 \cdot 60 =)$ 420 Kreuzer. Der Wert von $(420 + 155 =)$ 575 Kreuzern ist $(575 \cdot 4 =)$ 2 300 Pfennig. Oberhalb des Summendoppelstriches steht also ein Wert von $(2\,300 + 10 =)$ 2 310 Pfennig.

Unterhalb des Summendoppelstriches stehen 9 Gulden, 37 Kreuzer und 2 Pfennig. Der Wert von 9 Gulden ist $(9 \cdot 60 =)$ 540 Kreuzer. Der Wert von $(540 + 37 =)$ 577 Kreuzern ist $(577 \cdot 4 =)$ 2 308 Pfennig. Unterhalb des Summendoppelstriches steht also ein Wert von $(2\,308 + 2 =)$ 2 310 Pfennig.

Da oberhalb und unterhalb des Summendoppelstriches der gleiche Wert steht, entspricht das Ergebnis aus Teil a) den Werten der Tabelle.

Teil c) Nach der Abrechnung sind $(4+1+2=)$ 7 Gulden, $(27+36+43+8+41=)$ 155 Kreuzer und $(2+1+3+3+1=)$ 10 Pfennig genauso viel wert wie 9 Gulden, 37 Kreuzer und 2 Pfennig. Wir nehmen ober- und unterhalb des Summendoppelstriches den gleichen Wert von 7 Gulden, 37 Kreuzern und 2 Pfennig weg und erhalten:

$(7-7=)$ 0 Gulden, $(155-37=)$ 118 Kreuzer und $(10-2=)$ 8 Pfennig sind genauso viel wert wie $(9-7=)$ 2 Gulden, $(37-37=)$ 0 Kreuzer und $(2-2=)$ 0 Pfennig.

Daraus folgt:

1 Gulden hat den gleichen Wert wie 59 Kreuzer und 4 Pfennig.

Wir nehmen nun an, dass 1 Kreuzer 4 Pfennig wert ist. Dann folgt:

1 Kreuzer ist 4 Pfennig und 1 Gulden ist 60 Kreuzer wert.

Bemerkung: Wenn man die Abrechnungstabelle dahingehend interpretiert, dass Pfennigbeträge in die größtmögliche Anzahl an Kreuzern und restliche Pfennige umgerechnet worden sind, dann muss 1 Kreuzer mehr wert sein als 3 Pfennig. Wenn man nun weiter annimmt, dass ein Gulden den Wert einer ganzen Anzahl von Kreuzern hat und ein Kreuzer den Wert einer ganzen Anzahl von Pfennigen hat, dann folgt, dass ein Kreuzer tatsächlich den Wert von 4 Pfennig hat.

570813 Lösung *10 Punkte*

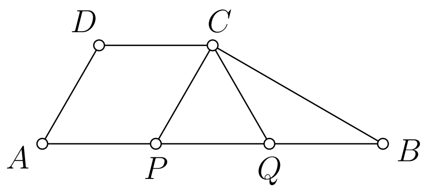
Nach Aufgabenstellung gelten

$$AB \parallel CD, \qquad (1)$$

$$|AD| = |CD|\,, \qquad (2)$$

$$|AB| = 3 \cdot |CD|\,, \qquad (3)$$

$$|\sphericalangle ADC| = 120^\circ\,. \qquad (4)$$



L 570813

Aus der Gleichung (3) folgt, dass es auf der Strecke $\overline{AB}$ zwei Punkte P und Q gibt, für die $|AP| = |PQ| = |BQ| = |CD|$ gilt, siehe Abbildung L 570813. Hieraus und aus der Gleichung (2) folgt

$$|AD| = |CD| = |AP| = |PQ| = |BQ|\,. \qquad (5)$$

Aus der Beziehung (1) und der Gleichung (5) sowie wegen der Lage der Punkte A, B, C und D folgt, dass das Viereck $APCD$ ein Parallelogramm ist, weil die Seiten $\overline{AP}$ und $\overline{CD}$ zueinander parallel und gleich lang sind.

Da in einem Parallelogramm gegenüberliegende Seiten gleich lang und gegenüberliegende Innenwinkel gleich groß sind, gelten

$$|CP| = |AD| \qquad (6)$$

und

$$|\sphericalangle CPA| = |\sphericalangle ADC|\,. \qquad (7)$$

Wegen der Gleichungen (5) und (6) ist das Dreieck CPQ gleichschenklig mit der Basis $\overline{CQ}$.

Wir berechnen die Innenwinkelgrößen im Dreieck CPQ. Aus den Gleichungen (4) und (7) folgt nach dem Nebenwinkelsatz

$$|\sphericalangle QPC| = 180° - |\sphericalangle CPA| = 180° - 120° = 60° . \tag{8}$$

Nach dem Basiswinkelsatz gilt $|\sphericalangle CQP| = |\sphericalangle PCQ|$. Hieraus und aus der Gleichung (8) folgt nach dem Innenwinkelsatz

$$|\sphericalangle CQP| = |\sphericalangle PCQ| = \frac{1}{2} \cdot (180° - |\sphericalangle QPC|) = \tfrac{1}{2} \cdot (180° - 60°) = 60° . \tag{9}$$

Wegen der Gleichungen (8) und (9) ist das Dreieck CPQ gleichseitig und daher gilt

$$|CQ| = |PQ| . \tag{10}$$

Wir berechnen nun die Innenwinkelgrößen im Dreieck BCQ. Wegen Gleichung (9) und nach dem Nebenwinkelsatz gilt

$$|\sphericalangle BQC| = 180° - |\sphericalangle CQP| = 180° - 60° = 120° . \tag{11}$$

Wegen der Gleichungen (5) und (10) ist das Dreieck BCQ gleichschenklig. Wegen Gleichung (11) und nach dem Basiswinkelsatz und dem Innenwinkelsatz gilt

$$|\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle CBQ| = \frac{1}{2} \cdot (180° - |\sphericalangle BQC|) = \frac{1}{2} \cdot (180° - 120°) = 30° .$$

Der Winkel $\sphericalangle CBA$ ist also 30° groß.

570814 Lösung *12 Punkte*

Teil a) Für die Summe s der ganzen Zahlen von 28 bis 36 gilt

$$s = 28 + (28+1) + (28+2) + \cdots + (28+8) = 9 \cdot 28 + 1 + 2 + \cdots + 8 = 252 + 36 = 288 .$$

Teil b) Es sei a eine ganze Zahl. Für die Summe s der 9 aufeinanderfolgenden, mit a beginnenden ganzen Zahlen gilt

$$\begin{aligned} s &= a + (a+1) + (a+2) + \cdots + (a+8) \\ &= 9 \cdot a + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 \\ &= 9 \cdot a + 36 \\ &= 9 \cdot (a+4) . \end{aligned}$$

Wenn a durch 4 teilbar ist, dann ist auch $a + 4$ durch 4 teilbar und die Summe s ist durch $(9 \cdot 4 =)$ 36 teilbar.

Teil c) Es gibt solche Zahlen a und n, nämlich zum Beispiel $a = 5$ und $n = 11$: Die Zahl 5 ist eine durch 5 teilbare positive ganze Zahl. Die Zahl 11 ist eine ganze Zahl größer als 1. Für die Summe s der 11 aufeinanderfolgenden, mit 5 beginnenden ganzen Zahlen gilt

$$\begin{aligned} s &= 5 + (5+1) + (5+2) + \cdots + (5+10) \\ &= 11 \cdot 5 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 \\ &= 55 + 55 \\ &= 2 \cdot 55 . \end{aligned}$$

Sie ist also tatsächlich durch $(5 \cdot 11 =)$ 55 teilbar.

Teil d) Es seien a eine beliebige positive ganze Zahl und n eine positive ganze Zahl. Für die Summe s der n aufeinanderfolgenden, mit a beginnenden ganzen Zahlen gilt

$$\begin{aligned} s &= a + (a+1) + (a+2) + \cdots + (a+n-1) \\ &= n \cdot a + 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) \\ &= n \cdot a + \frac{1}{2} \cdot (n-1) \cdot n\,. \end{aligned}$$

Für $n = 2 \cdot a + 1$ gelten $n > 1$, $s = n \cdot a + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot a \cdot n = 2 \cdot n \cdot a$ und s ist durch $n \cdot a$ teilbar. Folglich gibt es für jede positive ganze Zahl a eine ganze Zahl n mit $n > 1$ derart, dass die Summe der n aufeinanderfolgenden, mit a beginnenden ganzen Zahlen durch $a \cdot n$ teilbar ist.

Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

Aufgabe 570811	*Insgesamt: 8 Punkte*
Teil a)	4 Punkte
Teil b)	4 Punkte

Aufgabe 570812	*Insgesamt: 10 Punkte*
Teil a)	2 Punkte
Teil b)	4 Punkte
Teil c)	4 Punkte

Aufgabe 570813	*Insgesamt: 10 Punkte*
Problemerfassung und erkennbare Lösungsstrategie	2 Punkte
Notwendige Feststellungen und Begründungen	6 Punkte
Korrektes Ergebnis	2 Punkte

Aufgabe 570814	*Insgesamt: 12 Punkte*
Teil a)	3 Punkte
Teil b)	3 Punkte
Teil c)	3 Punkte
Teil d)	3 Punkte