Olympiadeklasse 7

57. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Lösungen

570711 Lösung *8 Punkte*

Wir lösen die Aufgabe durch Rückwärtsarbeiten. Nach Aufgabenstellung besitzt Simon genau eine Verzauberungskarte.

Von den Karten, die Monster- oder Verzauberungskarten sind, sind drei Viertel Monsterkarten, also ein Viertel Verzauberungskarten. Folglich sind $(4 \cdot 1 =)$ 4 Karten Monster- oder Verzauberungskarten, davon 3 Monsterkarten.

Von den Karten, die Energie-, Monster- oder Verzauberungskarten sind, sind zwei Drittel Energiekarten, also ein Drittel Monster- oder Verzauberungskarten. Folglich sind $(3 \cdot 4 =)$ 12 Karten Energie-, Monster- oder Verzauberungskarten, davon $(12 - 4 =)$ 8 Energiekarten.

Unter allen Karten ist die Hälfte Heldenkarten, also die andere Hälfte Energie-, Monster- oder Verzauberungskarten. Folglich sind es $(2 \cdot 12 =)$ 24 Karten, davon 12 Heldenkarten.

Simon hat also insgesamt bereits 24 Karten gesammelt.

Lösungsvariante: Wir bezeichnen die Anzahl der gesammelten Karten mit k und die Anzahlen der Helden-, Energie-, Monster- und Verzauberungskarten in dieser Reihenfolge mit h, e, m und v. Dann folgt aus der Aufgabenstellung:

	Karten	Rest der Karten
Heldenkarten	$h = \frac{1}{2} \cdot k$	$(k - \frac{1}{2} \cdot k =)\ \frac{1}{2} \cdot k$
Energiekarten	$e = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot k = \frac{1}{3} \cdot k$	$(\frac{1}{2} \cdot k - \frac{1}{3} \cdot k =)\ \frac{1}{6} \cdot k$
Monsterkarten	$m = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot k = \frac{1}{8} \cdot k$	$(\frac{1}{6} \cdot k - \frac{1}{8} \cdot k =)\ \frac{1}{24} \cdot k$
Verzauberungskarten	$v = \frac{1}{24} \cdot k$	

Nach Aufgabenstellung gilt $v = 1$. Hieraus folgt $k = 24$. Simon hat also insgesamt bereits 24 Karten gesammelt.

570712 Lösung *10 Punkte*

Milena hat $(50\,\text{Cent} + 20\,\text{Cent} + 10\,\text{Cent} + 5\,\text{Cent} + 2\,\text{Cent} + 1\,\text{Cent} =)$ 88 Cent als Rückgeld erhalten. Sie hat also $(10\,\text{Euro} - 88\,\text{Cent} =)$ 9,12 Euro bzw. 912 Cent bezahlt. Vom richtigen Betrag, den Milena zu zahlen hat, ist bekannt, dass er durch 4 teilbar sein muss, denn Milena kauft vier Bretter zum gleichen Preis.

Der falsche Betrag von 912 Cent ist nach der Teilbarkeitsregel für die Zahl 4 durch 4 teilbar, da die Zahl, die aus den letzten beiden Ziffern gebildet wird, also 12, durch 4 teilbar ist. Damit muss auch die Differenz aus richtigem Betrag und falschem Betrag, d. h. der Wert der Münze, die Milena zurückgeben muss, durch 4 teilbar sein.

Da von den herausgegebenen Münzen nur die 20-Cent-Münze einen durch 4 teilbaren Betrag hat, kann nur sie die gesuchte Münze sein. Milena muss also die 20-Cent-Münze zurückgeben.

Der richtige Betrag, den Milena zu zahlen hat, ist daher (9,12 Euro + 20 Cent =) 9,32 Euro. Jedes der vier Bretter kostet folglich (9,32 Euro : 4 =) 2,33 Euro.

Lösungsvariante: Wie oben festgestellt, hat Milena 9,12 Euro bzw. 912 Cent gezahlt, und der richtige Betrag, den sie zu zahlen hat, muss durch 4 teilbar sein. Wir berechnen nacheinander für jede der 6 Münzen den Betrag, der sich ergibt, wenn Milena diese Münze zurückgeben würde, und prüfen, welche der Beträge durch 4 teilbar sind:

$$\begin{aligned}
912\,\text{Cent} + 50\,\text{Cent} &= 962\,\text{Cent}\,,\\
912\,\text{Cent} + 20\,\text{Cent} &= 932\,\text{Cent}\,,\\
912\,\text{Cent} + 10\,\text{Cent} &= 922\,\text{Cent}\,,\\
912\,\text{Cent} + 5\,\text{Cent} &= 917\,\text{Cent}\,,\\
912\,\text{Cent} + 2\,\text{Cent} &= 914\,\text{Cent}\,,\\
912\,\text{Cent} + 1\,\text{Cent} &= 913\,\text{Cent}\,.
\end{aligned}$$

Nach der Teilbarkeitsregel für 4 ist von diesen Beträgen nur 932 Cent durch 4 teilbar. Somit kann nur die 20-Cent-Münze die zu viel herausgegebene Münze sein. Milena muss also die 20-Cent-Münze zurückgeben. Jedes der vier Bretter kostet (9,32 Euro : 4 =) 2,33 Euro.

570713 Lösung *10 Punkte*

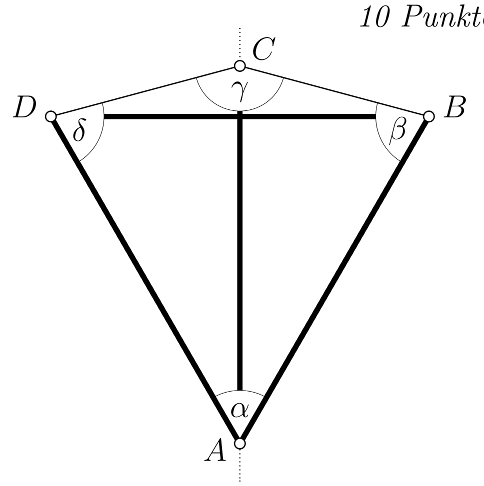
Wir bezeichnen die Größen der Winkel $\sphericalangle BAD$, $\sphericalangle CBA$, $\sphericalangle DCB$ und $\sphericalangle ADC$ in dieser Reihenfolge wie üblich mit α, β, γ und δ.

Nach Voraussetzung (1) gilt $|AB| = |AD|$. Nach Voraussetzung (2) gilt $|AC| = |BD|$. Nach Voraussetzung (3) gilt $|AB| = |AC|$. Aus diesen drei Gleichungen folgt

$$|AD| = |AB| = |BD| = |AC|\,, \tag{4}$$

siehe Abbildung L 570713. Wegen (4) ist das Dreieck ABD gleichseitig. Daher gilt

$$\alpha = |\sphericalangle BAD| = 60°\,. \tag{5}$$



L 570713

Wegen (1) ist die Gerade AC Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle BAD$, weswegen $|\sphericalangle BAC| = \frac{1}{2} \cdot |\sphericalangle BAD|$ gilt. Hieraus und aus (5) folgt

$$|\sphericalangle BAC| = 30°\,. \tag{6}$$

Nun betrachten wir das Dreieck ABC. Dieses ist wegen (4) gleichschenklig mit der Basis $\overline{BC}$. Aus (6) und nach dem Basiswinkelsatz und dem Innenwinkelsatz folgt

$$\beta = |\sphericalangle CBA| = \frac{1}{2} \cdot (180° - |\sphericalangle BAC|) = \frac{1}{2} \cdot 150° = 75°\,. \tag{7}$$

Wegen (1) und (7) folgt

$$\delta = |\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle CBA| = 75°\,. \tag{8}$$

Wegen (5), (7) und (8) und nach dem Innenwinkelsatz für Vierecke folgt

$$\gamma = |\sphericalangle DCB| = 360° - |\sphericalangle BAD| - |\sphericalangle CBA| - |\sphericalangle ADC| = 150°\,.$$

Die Innenwinkel des Vierecks $ABCD$ haben also die Größen 60°, 75°, 75° und 150°.

Teil a) Mit jedem der drei Würfel können unabhängig voneinander die Augenzahlen von 1 bis 6 gewürfelt werden. Daher kann Florian für die Hunderter-, Zehner- und Einerziffer jeweils unabhängig voneinander jede der Ziffern von 1 bis 6 erhalten.

Es gibt folglich genau $(6 \cdot 6 \cdot 6 =)$ 216 dreistellige Zahlen, die wie gefordert gebildet werden können.

Teil b) Wenn wir die Reihenfolge zunächst einmal außer Acht lassen, gibt es wegen

$$7 = 1 + 1 + 5 = 1 + 2 + 4 = 1 + 3 + 3 = 2 + 2 + 3$$

genau vier Möglichkeiten, die Zahl 7 als Summe von 3 natürlichen Zahlen aus dem Bereich von 1 bis 6 zu schreiben. Bei drei dieser Möglichkeiten, nämlich $1 + 1 + 5$, $1 + 3 + 3$ und $2 + 2 + 3$, sind jeweils zwei Summanden gleich. In diesen Fällen gibt es, abhängig davon, welcher Würfel welche Augenzahl zeigt, jeweils genau 3 mögliche dreistellige Zahlen mit diesen Summanden als Ziffern, nämlich

$$\begin{array}{llll} 115\,, & 151 & \text{und} & 511\,, \\ 331\,, & 313 & \text{und} & 133\,, \\ 223\,, & 232 & \text{und} & 322\,. \end{array}$$

Bei der noch übrigen vierten Möglichkeit $7 = 1+2+4$ gibt es, abhängig davon, welcher Würfel welche Augenzahl zeigt, genau 6 dreistellige Zahlen, die gebildet werden können, nämlich

$$124\,, \quad 142\,, \quad 214\,, \quad 241\,, \quad 412 \quad \text{und} \quad 421\,.$$

Insgesamt gibt es daher genau 15 Möglichkeiten, eine dreistellige Zahl mit der Quersumme 7 zu erhalten.

Teil c) I. Wir betrachten zwei Zahlen, die Florian gewürfelt haben könnte, und bezeichnen mit g die größere der beiden Zahlen und mit k die kleinere der beiden. Nach Aufgabenstellung gilt dann $g - k = 547$ und folglich

$$g = k + 547 \quad \text{und} \quad k = g - 547\,. \tag{$*$}$$

Da 666 die größtmögliche Zahl ist, die Florian bilden kann, folgt aus $(*)$ die Abschätzung $k = g - 547 \leq 666 - 547 = 119$. Weil k nach Voraussetzung eine dreistellige Zahl ist, die nur Ziffern von 1 bis 6 enthält, kommen für k nur die sechs Zahlen 111, 112, 113, 114, 115 und 116 in Frage.

Für $k = 111$, $k = 112$ und $k = 113$ erhalten wir aus $(*)$ der Reihe nach $g = 547 + 111 = 658$, $g = 547 + 112 = 659$ und $g = 547 + 113 = 660$. Da auch die Zahl g nach Voraussetzung nur die Ziffern 1 bis 6 enthält, sind diese drei Zahlen für k nicht möglich.

Daher kann k nur eine der Zahlen 114, 115 und 116 sein.

II. Für $k = 114$, $k = 115$ und $k = 116$ erhalten wir aus (1) die drei Zahlenpaare $(114, 661)$, $(115, 662)$ und $(116, 663)$ für (k, g). Alle drei Paare enthalten tatsächlich zwei dreistellige Zahlen nur aus den Ziffern von 1 bis 6 und die größere ist nach Konstruktion um 547 größer als die kleinere. Sie erfüllen also alle Forderungen.

Aus I. und II. folgt, dass Florian nur 114 und 661, 115 und 662 oder 116 und 663 erwürfelt haben kann.

Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

Aufgabe 570711	*Insgesamt: 8 Punkte*
Brauchbarer und erkennbarer Lösungsansatz	2 Punkte
Logisch korrekte und lückenlose Herleitung des Lösungswegs	4 Punkte
Richtiges Ergebnis	2 Punkte

Aufgabe 570712	*Insgesamt: 10 Punkte*
Prinzipiell geeigneter Lösungsansatz	2 Punkte
Bestimmung der gesuchten Münze mit Begründung der Eindeutigkeit	7 Punkte
Berechnung des Einzelpreises der Bretter	1 Punkt

Aufgabe 570713	*Insgesamt: 10 Punkte*
Prinzipiell geeigneter Lösungsansatz	1 Punkt
Schlussfolgerungen aus der Symmetrie in Bezug auf die Seiten des Vierecks $ABCD$ und des Dreiecks ABD	2 Punkte
Bestimmung der gesuchten Innenwinkelgrößen	6 Punkte
Korrektes Ergebnis	1 Punkt

Aufgabe 570714	*Insgesamt: 12 Punkte*
Teil a)	2 Punkte
Teil b)	4 Punkte
Teil c)	6 Punkte