Olympiadeklasse 6

57. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Lösungen

570611 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Ein Zehntel von 30 Schülern sind 3 Schüler, die je 15 Runden laufen.

Ein Fünftel von 30 Schülern sind 6 Schüler, die je 12 Runden laufen.

Ein Drittel von 30 Schülern sind 10 Schüler, die je 10 Runden laufen.

Die restlichen $(30 - (3 + 6 + 10) =)\, 11$ Schüler laufen je 8 Runden.

Insgesamt werden von den Schülern der Klasse 6a $(3 \cdot 15 + 6 \cdot 12 + 10 \cdot 10 + 11 \cdot 8 =)\, 305$ Runden gelaufen.

Teil b) Es gilt $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{7}{8}$. Folglich entsprechen die restlichen drei Schüler, die je 14 Runden laufen, dem Bruchteil $(1 - \frac{7}{8} =)\, \frac{1}{8}$ der Klasse. Hieraus ergibt sich eine Klassenstärke von $(3 \cdot 8 =)\, 24$ Kindern.

Die Hälfte von den 24 Schülern sind 12 Schüler, die je 10 Runden laufen.

Ein Achtel von 24 Schülern sind 3 Schüler, die je 9 Runden laufen.

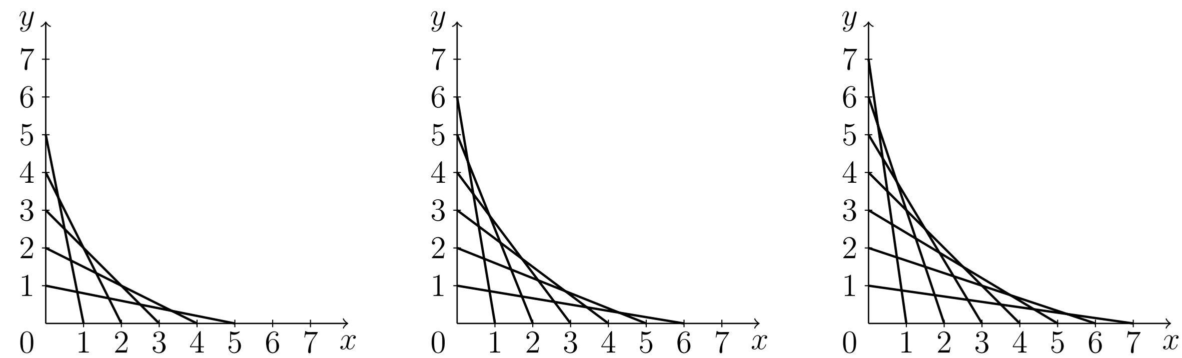
Ein Viertel von 24 Schülern sind 6 Schüler, die je 8 Runden laufen.

Die restlichen 3 Schüler laufen je 14 Runden.

Insgesamt werden von den Schülern der Klasse 6b $(12 \cdot 10 + 3 \cdot 9 + 6 \cdot 8 + 3 \cdot 14 =)\, 237$ Runden gelaufen.

570612 Lösung *10 Punkte*

Teil a)



Stufe 4 Stufe 5 Stufe 6

Teil b) Die Strecken haben in der 3. Stufe 6 Schnittpunkte, in der 4. Stufe 10 Schnittpunkte, in der 5. Stufe 15 Schnittpunkte und in der 6. Stufe 21 Schnittpunkte.

Stufe	3	4	5	6
Anzahl Schnittpunkte	$1+2+3$ $=3+3$ $=6$	$1+2+3+4$ $=6+4$ $=10$	$1+2+3+4+5$ $=10+5$ $=15$	$1+2+3+4+5+6$ $=15+6$ $=21$

Teil c) In jeder Stufe werden nacheinander Strecken eingezeichnet, die jede zuvor gezeichnete Strecke schneiden. Die Anzahl der Schnittpunkte bei $n+1$ Strecken ergibt sich also als Summe der ersten n positiven ganzen Zahlen. In der 20. Stufe beträgt sie demzufolge

$$1+2+3+\cdots+19+20=210.$$

Hinweis: Durch die Lösung dieser Aufgabe ergibt sich die Anregung, die Summenformel für natürliche Zahlen durch geschickte Klammersetzung zu veranschaulichen:

$$1+2+3+\cdots+19+20=(1+20)+(2+19)+\cdots+(10+11)=10\cdot 21=210.$$

570613 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Es gibt folgende Anordnungsmöglichkeiten:

$$(9+8)\cdot 7=119; \qquad (9+7)\cdot 8=128; \qquad (8+7)\cdot 9=135;$$
$$(9\cdot 8)+7=\ \ 79; \qquad (9\cdot 7)+8=\ \ 71; \qquad (8\cdot 7)+9=\ \ 65.$$

Das größte Ergebnis erhält man folglich bei $(7+8)\cdot 9=135$, das kleinste bei $(7\cdot 8)+9=65$.

Teil b) Zwischen $(9+8)\cdot 7=119$ und $(7+9)\cdot 8=128$ lässt sich kein weiteres Ergebnis bilden.

Andererseits gilt $120=15\cdot 8=(6+9)\cdot 8$; wenn also Daniel die Karte mit der 7 durch eine mit der 6 tauscht, kommt das gewünschte Ergebnis heraus.

Teil c) Wenn zuerst multipliziert und dann addiert wird, so ist das größtmögliche Ergebnis $(9\cdot 9+9=)\,90<111$.

Betrachten wir nun den Fall, dass zuerst addiert und dann multipliziert wird: Es gilt $111=1\cdot 111=3\cdot 37$ (als einzig mögliche Zerlegungen). Die Zahlen 111 und 37 lassen sich aber nicht als Summe zweier einstelliger Zahlen schreiben, also gibt es für das Ergebnis 111 keine Lösung.

570614 Lösung *10 Punkte*

In den Tabellen bedeutet „0“ „Lampe aus“ und „1“ „Lampe an“. Die betätigten Lampen sind **fett** dargestellt.

Teil a) Eine mögliche Lösung ist in dieser Tabelle dargestellt:

	Lampe 1	Lampe 2	Lampe 3	Lampe 4
Person 1	**1**	0	0	0
Person 2	1	**1**	**1**	0
Person 3	**0**	**0**	**0**	0
Person 4	**1**	**1**	**1**	**1**

Teil b) Eine mögliche Lösung ist in dieser Tabelle darsgestellt:

	Lampe 1	Lampe 2	Lampe 3	Lampe 4	Lampe 5
Person 1	**1**	0	0	0	0
Person 2	1	0	0	**1**	**1**
Person 3	**0**	**1**	**1**	1	1
Person 4	0	**0**	**0**	**0**	**0**
Person 5	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**

Teil c) Wenn sechs Personen nach den Regeln schalten, so ergeben sich insgesamt $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 =)$ 21 Schaltungen; 21 ist eine ungerade Zahl.

Jede der sechs Lampen muss eine ungerade Zahl von Schaltungen durchmachen, damit sie am Schluss angeschaltet ist. Die Summe von sechs ungeraden Zahlen ist aber gerade und kann deswegen nie 21 betragen.

Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

Aufgabe 570611	*Insgesamt: 10 Punkte*
Teil a)	5 Punkte
Teil b)	5 Punkte

Aufgabe 570612	*Insgesamt: 10 Punkte*
Teil a)	3 Punkte
Teil b)	4 Punkte
Teil c)	3 Punkte

Aufgabe 570613	*Insgesamt: 10 Punkte*
Teil a)	5 Punkte
Teil b)	2 Punkte
Teil c)	3 Punkte

Aufgabe 570614	*Insgesamt: 10 Punkte*
Teil a)	3 Punkte
Teil b)	4 Punkte
Teil c)	3 Punkte