Olympiadeklasse 5

57. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Lösungen

570511 Lösung *10 Punkte*

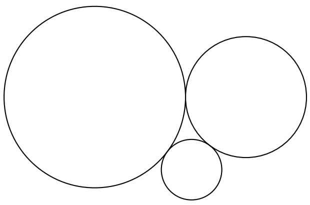
Teil a) Da der Lkw bei der zweiten Fahrt 500 kg mehr transportierte als bei der ersten, betrug die Last der ersten Fahrt $((9500\,\text{kg} - 500\,\text{kg}) : 2 =)\, 4500\,\text{kg}$. Daraus folgt für die Last der zweiten Fahrt eine Masse von $(4500\,\text{kg} + 500\,\text{kg} =)\, 5000\,\text{kg}$.

Teil b) Die gesamte Masse des Schutts verteilt sich zu zwei Teilen auf die erste und zu einem Teil auf die zweite Fahrt, das sind insgesamt drei Teile. Daraus folgt, dass der Lkw bei der zweiten Fahrt $(9600\,\text{kg} : 3 =)\, 3200\,\text{kg}$ abtransportiert hat und bei der ersten Fahrt $(3200\,\text{kg} \cdot 2 =)\, 6400\,\text{kg}$.

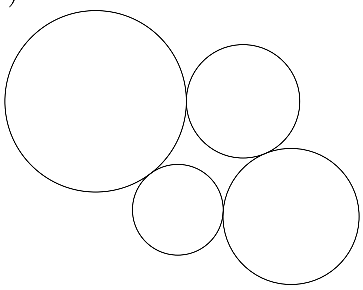
Teil c) Da $100\,\text{t} = 100\,000\,\text{kg}$ gilt und $100\,000 : 9600 = 10\,\text{Rest}\,4000$ gilt, wird am 11. Arbeitstag der gesamte Schutt abtransportiert sein.

570512 Lösung *10 Punkte*

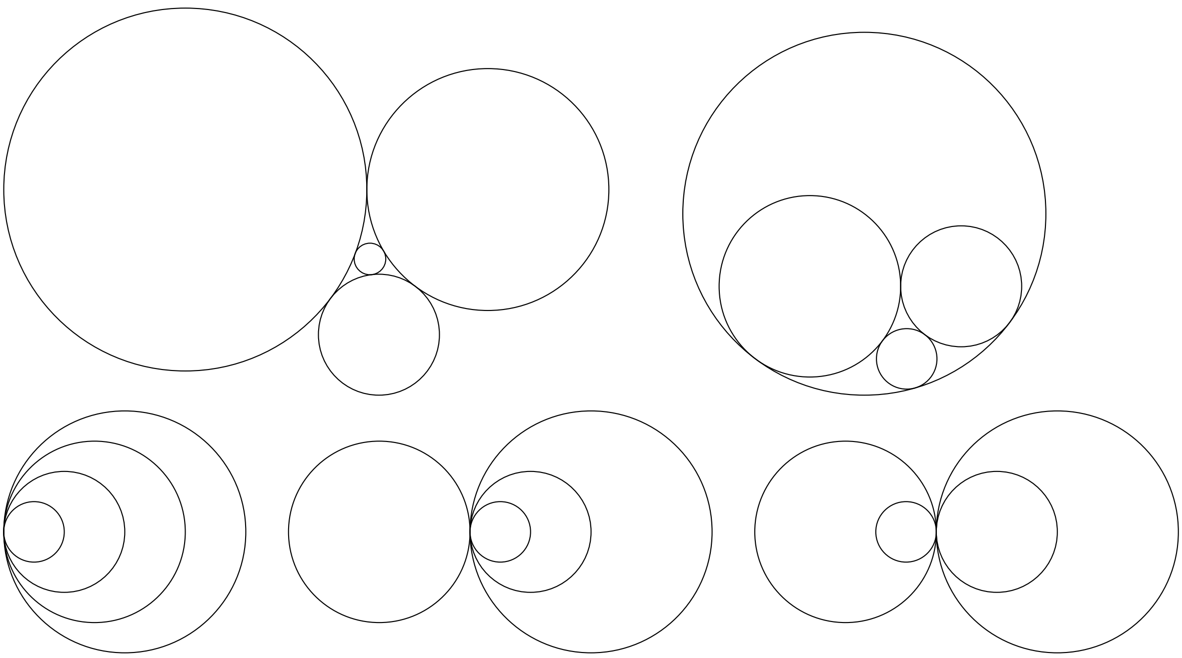
Teil a)



Teil b)



Teil c) Mögliche Lösungen sind:



570513 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Da Christian der Zweitgrößte ist (wegen (1)), Andreas nicht der Größte ist (wegen (2)) und Daniel nicht der Größte sein kann (wegen (4)), muss Benedikt der Größte sein.

Folglich sind Daniel und Andreas auf die Plätze 3 und 4 zu verteilen, und aus Aussage (4) folgt, dass Daniel der Kleinste ist.

Die Reihenfolge lautet demzufolge Benedikt, Christian, Andreas, Daniel.

Teil b) Da man zur Lösung von a) die Aussage (3) nicht benötigt, ist diese Aussage überflüssig.

570514 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Hier hilft Rückwärtsrechnen:

Zum Schluss hat Lena 4 hinzugefügt und 2017 erhalten. Also hatte sie zuvor die Zahl $(2017 - 4 =)\,2013$.

2013 erhielt sie durch Multiplikation mit 11. Also hatte sie zuvor die Zahl $(2013 : 11 =)\,183$.

Zu der Zahl davor hat Lena 13 hinzugefügt und 183 erhalten. Also hatte sie zuvor die Zahl $(183 - 13 =)\,170$.

Schließlich hat Lena ihre Anfangszahl mit 17 multipliziert und 170 erhalten.

Folglich war ihre Anfangszahl $(170 : 17 =)\,10$.

Probe: $10 \cdot 17 = 170$; $170 + 13 = 183$; $183 \cdot 11 = 2013$; $2013 + 4 = 2017$.

Teil b) Sind 3 Zahlen a, b und c gegeben, von denen a größer als 1 und b größer als c ist, dann ist $a \cdot b + c$ größer als $a \cdot c + b$. In der Tat, $(a-1) \cdot b$ ist größer als $(a-1) \cdot c$ und wenn man zu diesen beiden Zahlen $b + c$ addiert, erhält man, dass $a \cdot b + c$ größer als $a \cdot c + b$ ist.

Deswegen brauchen nur die folgenden 6 Fälle untersucht zu werden, in denen der Summand bei der Addition immer kleiner als der Faktor bei der vorherigen Multiplikation ist.

$$\begin{array}{llll}
10 \cdot 17 = 170; & 170 + 13 = 183; & 183 \cdot 11 = 2013; & 2013 + 4 = 2017; \\
10 \cdot 17 = 170; & 170 + 11 = 181; & 181 \cdot 13 = 2353; & 2353 + 4 = 2357; \\
10 \cdot 17 = 170; & 170 + 4 = 174; & 174 \cdot 13 = 2262; & 2262 + 11 = 2273; \\
10 \cdot 13 = 130; & 130 + 11 = 141; & 141 \cdot 17 = 2397; & 2397 + 4 = 2401; \\
10 \cdot 13 = 130; & 130 + 4 = 134; & 134 \cdot 17 = 2278; & 2278 + 11 = 2289; \\
10 \cdot 11 = 110; & 110 + 4 = 114; & 114 \cdot 17 = 1938; & 1938 + 13 = 1951.
\end{array}$$

Das größtmögliche Ergebnis ist 2401.

Hinweis: Es kann auch auf die theoretische Begründung am Anfang verzichtet werden. Dann müssen aber alle 24 möglichen Kombinationen untersucht werden.

Teil c) Ja, noch größere Zahlen sind möglich, wenn man zunächst die kleineren Zahlen addiert und dann zweimal mit den größeren Zahlen multipliziert.

Beispiel:

$$10 + 4 = 14; \qquad 14 + 11 = 25; \qquad 25 \cdot 13 = 325; \qquad 325 \cdot 17 = 5525.$$

Hinweis: Man kann zeigen, dass 5525 sogar die größte so erreichbare Zahl ist.

Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

Aufgabe 570511	*Insgesamt: 10 Punkte*
Teil a)	3 Punkte
Teil b)	4 Punkte
Teil c)	3 Punkte

Aufgabe 570512	*Insgesamt: 10 Punkte*
Teil a)	2 Punkte
Teil b)	3 Punkte
Teil c)	
Erste Lösung	2 Punkte
Zweite Lösung	3 Punkte

Aufgabe 570513	*Insgesamt: 10 Punkte*
Teil a)	7 Punkte
Teil b)	3 Punkte

Aufgabe 570514	*Insgesamt: 10 Punkte*
Teil a)	3 Punkte
Teil b)	4 Punkte
Teil c)	3 Punkte