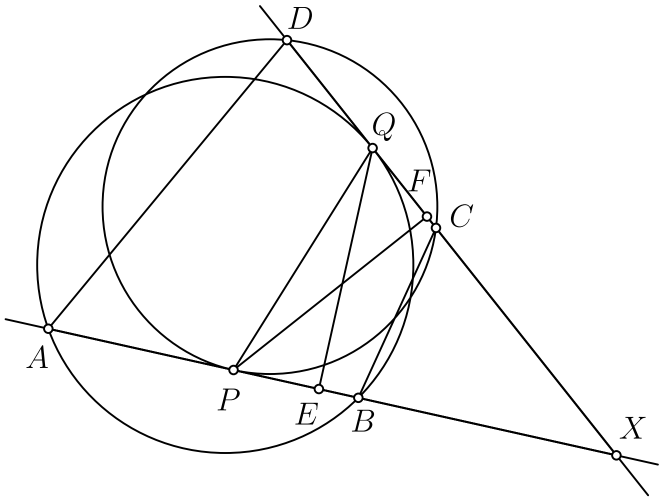
56. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklasse 12
Lösungen – 2. Tag

561244 Lösung *6 Punkte*



L 561244

Weil der Kreis durch C, D und P nur einen Punkt mit der Geraden AB gemeinsam hat, muss P dieser Berührungspunkt sein, vgl. Abbildung L 561244. Entsprechend berührt der Kreis durch A, B und Q die Gerade CD im Punkt Q.

Sind die Geraden AB und CD parallel, so ist die Behauptung offensichtlich wahr. Sind sie nicht parallel, so bezeichne X ihren Schnittpunkt. Da A, B, C und D als Eckpunkte eines Sehnenvierecks auf einem Kreis liegen, gilt nach dem Sekantensatz $|XA| \cdot |XB| = |XC| \cdot |XD|$.

Die Gerade XQ ist Tangente an den Kreis durch A, B und Q, womit nach dem Sekanten-Tangenten-Satz $|XA| \cdot |XB| = |XQ|^2$ gilt. Analog erhält man $|XC| \cdot |XD| = |XP|^2$ und damit $|XP| = |XQ|$. Damit ist das Dreieck PXQ gleichschenklig, und die Höhen $\overline{PF}$ und $\overline{QE}$ in diesem Dreieck sind gleich lang. Folglich hat der Punkt P von der Geraden CD denselben Abstand wie der Punkt Q von der Geraden AB.

561245 Lösung *7 Punkte*

Zur Abkürzung setzen wir

$$T = \frac{x}{1-yz} + \frac{y}{1-zx} + \frac{z}{1-xy}\,.$$

Wegen $x, y, z \geq 0$ und $x + y + z = 1$ ist $y + z \leq 1$, woraus mit der bekannten Ungleichung $4yz \leq (y+z)^2$ (oder der Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel) $yz \leq 1/4$ folgt. Entsprechend gelten die Abschätzungen $xy \leq 1/4$ und $zx \leq 1/4$. Die Nenner der drei Summanden von T sind also stets positiv, aber nicht größer als 1. Damit folgt

$$T = \frac{x}{1-yz} + \frac{y}{1-zx} + \frac{z}{1-xy} \geq x + y + z = 1\,.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn (wenigstens) eine der Variablen 0 ist.

Um die rechte Ungleichung zu beweisen, behandeln wir die drei Summanden von T einzeln. Es ist

$$T_x = \frac{x}{1-yz} = \frac{4x}{4-4yz} \leq \frac{4x}{4-(y+z)^2} = \frac{4x}{4-(1-x)^2} = \frac{4x}{3+2x-x^2}\,.$$

Wir zeigen

$$\frac{4x}{3+2x-x^2} \leq \frac{3}{64} + \frac{63}{64}\,x\,.$$

Für $0 \leq x \leq 1$ ist diese Ungleichung äquivalent zu

$$256x \leq (3+63x)(3+2x-x^2) = -63x^3 + 123x^2 + 195x + 9$$

und wegen $-63x^3 + 123x^2 - 61x + 9 = (-7x+9)(3x-1)^2 \geq 0$ erfüllt. Vertauscht man die Variablen zyklisch, so folgt

$$T_x = \frac{x}{1-yz} \leq \frac{3}{64} + \frac{63}{64}\,x\,,$$
$$T_y = \frac{y}{1-zx} \leq \frac{3}{64} + \frac{63}{64}\,y\,,$$
$$T_z = \frac{z}{1-xy} \leq \frac{3}{64} + \frac{63}{64}\,z$$

und schließlich

$$T = T_x + T_y + T_z \leq \frac{9}{64} + \frac{63}{64}\,(x+y+z) = \frac{9}{8}\,.$$

Damit ist auch die rechte Ungleichung bewiesen. Gleichheit gilt genau für $x = y = z = 1/3$.

561246 Lösung *7 Punkte*

Für eine solche Zahl m seien die m aufeinanderfolgenden Zahlen die Zahlen $n+1$ bis $n+m$. Mit der bekannten Summenformel für Quadratzahlen

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

erhält man aus der Problemstellung nacheinander die (wegen $m > 0$) äquivalenten Gleichungen

$$\begin{aligned}
m^3 &= \frac{(n+m)(n+m+1)(2n+2m+1)}{6} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,,\\
6m^3 &= 2m^3 + (6n+3)m^2 + (6n^2+6n+1)m\,,\\
0 &= -4m^2 + 6n^2 + 6mn + 3m + 6n + 1\,.
\end{aligned}$$

Um die linearen Terme zu eliminieren, formt man weiter um:

$$\begin{aligned}
0 &= -4m^2 + 6n^2 + 6mn + 3m + 6n + 1\\
&= -4m^2 + 6\left(n + \frac{m}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}m^2 + 3m + 6n + 1\\
&= -\frac{11}{2}m^2 + 6\left(n + \frac{m}{2}\right)^2 + 6\left(n + \frac{m}{2}\right) + 1\\
&= -\frac{11}{2}m^2 + 6\left(n + \frac{m}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} + 1\,,\\
0 &= -11m^2 + 3\,(2n+m+1)^2 - 1\,.
\end{aligned}$$

Mit der Substitution $k = 2n + m + 1$ werden also Lösungen von

$$3k^2 - 11m^2 = 1 \tag{1}$$

in ganzen Zahlen gesucht. Diese Gleichung erinnert an eine Pell-Gleichung und hat die Lösung $m = 1$, $k = 2$. Findet man eine weitere Lösung, so lässt sich mit dieser eine Rekursionsvorschrift zur Berechnung beliebig vieler Lösungen aufstellen.

Durch die Substitution $l = 3k$ wird die Gleichung (1) zunächst in eine Pell-Gleichung umgeformt,

$$\begin{aligned}
9k^2 - 33m^2 &= 3\,,\\
l^2 - 33m^2 &= 3\,. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Damit auch k ganzzahlig ist, werden Lösungen von Gleichung (2) mit $3 \mid l$ gesucht. Eine solche Lösung ist $(l, m) = (6, 1)$. Um daraus weitere Lösungen zu konstruieren, verwendet man eine nicht-triviale Lösung von

$$p^2 - 33q^2 = 1\,.$$

Man findet $(23, 4)$. Damit lässt sich (2) äquivalent umformen:

$$\begin{aligned}
\left(l^2 - 33m^2\right)\left(23^2 - 33\cdot 4^2\right) &= 3\,,\\
\left(l + \sqrt{33}m\right)\left(l - \sqrt{33}m\right)\left(23 + \sqrt{33}\cdot 4\right)\left(23 - \sqrt{33}\cdot 4\right) &= 3\,,\\
\left(l + \sqrt{33}m\right)\left(23 + \sqrt{33}\cdot 4\right)\left(l - \sqrt{33}m\right)\left(23 - \sqrt{33}\cdot 4\right) &= 3\,,\\
\left(23l + 33\cdot 4m + (4l + 23m)\sqrt{33}\right)\left(23l + 33\cdot 4m - (4l + 23m)\sqrt{33}\right) &= 3\,,\\
(23l + 132m)^2 - 33\cdot(4l + 23m)^2 &= 3\,.
\end{aligned}$$

Ist also das Paar (l, m) eine Lösung von (2), so gilt dies auch für $(23l + 132m, 4l + 23m)$. Man beachte dabei, dass $3 \mid l$ tatsächlich $3 \mid 23l + 132m$ impliziert. Mit $l = 3k$ erhalten wir für k und m die Rekursionsvorschrift

$$(k, m) \qquad \longrightarrow \qquad (23k + 44m, 12k + 23m)\,,$$

die aus $(k, m) = (2, 1)$ die Lösung $(90, 47)$ liefert. Aus $k = 2n+m+1$ erhält man dann $n = 21$. Also ist eine (die zweitkleinste) Lösung

$$\underbrace{22^2 + 23^2 + \cdots + 68^2}_{\text{47 Summanden}} = 47^3\,.$$

Da die Rekursion unverändert m ungerade und k gerade lässt, ist auch n immer ganzzahlig. Damit ist bewiesen, dass es unendlich viele positive ganze Zahlen m gibt, die der Bedingung der Aufgabenstellung genügen.