56. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklasse 9
Lösungen – 2. Tag

560944 Lösung *6 Punkte*

Teil a) Da es für jede der fünf Ziffern unabhängig voneinander zwei Möglichkeiten gibt, lassen sich genau $2^5 = 32$ solche Botschaften bilden.

Teil b) Eine Botschaft wird genau dann zweimal hintereinander richtig empfangen, wenn jede der zehn übermittelten Ziffern richtig empfangen wird. Dies ist mit Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{9}{10}\right)^{10}$ der Fall (also etwa in 35 % der Fälle).

Teil c) Die Wahrscheinlichkeit, dass beim einmaligen Versenden der Botschaft die Ziffern an zwei vorgegebenen Stellen falsch und die anderen drei richtig sind, ist $\left(\frac{1}{10}\right)^2 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^3$. Es gibt 10 Möglichkeiten, aus den fünf Ziffern genau zwei auszuwählen. Also ist

$$10 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^3$$

die Wahrscheinlichkeit, dass beim Versenden einer Botschaft genau zwei Ziffern falsch sind.

Die Wahrscheinlichkeit, dass beim zweiten Versenden genau die gleichen Fehler auftreten, ist gleich $\left(\frac{1}{10}\right)^2 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^3$. Die Wahrscheinlichkeit, dass beim zweimaligen Übertragen einer Ziffernfolge genau dieselben zwei Ziffern falsch übertragen werden, beträgt also

$$10 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^4 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^6 = \frac{9^6}{10^9}\,.$$

Teil d) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich als Quotient

$$\frac{P_{2r}}{P_2}$$

aus der Wahrscheinlichkeit P_{2r}, dass Kai zweimal die richtige Botschaft empfängt, und der Wahrscheinlichkeit P_2, dass Kai zweimal hintereinander dieselbe (nicht notwendigerweise richtige) Botschaft erhält.

Wir betrachten zunächst die erste empfangene Ziffer beim ersten Versenden und die erste empfangene Ziffer beim zweiten Versenden. Die Wahrscheinlichkeit, dass beide richtig sind, ist $p_{2r} = \left(\frac{9}{10}\right)^2 = \frac{81}{100}$; die Wahrscheinlichkeit, dass beide falsch sind, ist $\left(\frac{1}{10}\right)^2$. Folglich ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide übereinstimmen, gleich $p_2 = \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{82}{100}$. Für die übrigen vier Ziffern erhalten wir entsprechend dieselben Wahrscheinlichkeiten, und es folgt

$$P_{2r} = p_{2r}^5 = \left(\frac{81}{100}\right)^5,$$

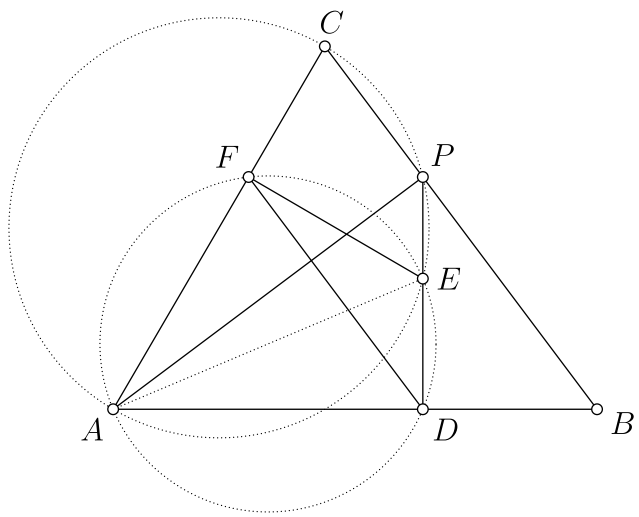
$$P_2 = p_2^5 = \left(\frac{82}{100}\right)^5.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist demnach gleich

$$\frac{P_{2r}}{P_2} = \left(\frac{81}{100}\right)^5 \cdot \left(\frac{100}{82}\right)^5 = \left(\frac{81}{82}\right)^5 .$$

<u>560945 Lösung</u> *7 Punkte*

Erste Lösung:



L 560945 a

Das (konvexe) Viereck $ADEF$ ist ein Sehnenviereck, da D und F beide auf dem Thaleskreis über der Strecke $\overline{AE}$ liegen. D und F liegen dabei auf verschiedenen Seiten der Geraden AE, da E im Inneren, D und F aber auf den Seiten $\overline{AB}$ bzw. $\overline{AC}$ des Dreiecks ABC liegen.

Da P und E auf derselben Seite der Geraden AC liegen, ist das Viereck $AEPC$ konvex und wegen $|\sphericalangle CEA| = |\sphericalangle CPA| = 90°$ ist es ebenfalls ein Sehnenviereck.

Damit gilt

$$|\sphericalangle PDF| = |\sphericalangle EDF| = |\sphericalangle EAF| ,$$

weil E auf der Strecke $\overline{DP}$ sowie D und A auf dem Umkreis des Sehnenvierecks $ADEF$ und auf derselben Seite der Sehne $\overline{EF}$ liegen,

$$|\sphericalangle EAF| = |\sphericalangle EAC| = 180° - |\sphericalangle CPE| ,$$

weil F auf der Strecke $\overline{AC}$ sowie A und P auf dem Umkreis des Sehnenvierecks $AEPC$, aber auf verschiedenen Seiten der Sehne $\overline{CE}$ liegen,

$$180° - |\sphericalangle CPE| = 180° - |\sphericalangle CPD| ,$$

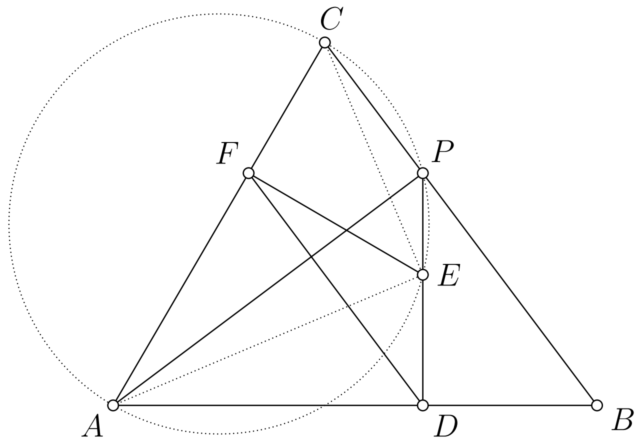
weil E auf der Strecke $\overline{PD}$ liegt, und

$$180° - |\sphericalangle CPD| = |\sphericalangle DPB| ,$$

weil $\sphericalangle DPB$ Nebenwinkel von $\sphericalangle CPD$ ist.

Also gilt $|\sphericalangle PDF| = |\sphericalangle DPB|$. Mit der Umkehrung des Wechselwinkelsatzes folgt daraus, dass die Geraden DF und $BP = BC$ parallel sind, was zu zeigen war.

Zweite Lösung:



L 560945 b

Wegen $|\sphericalangle CEA| = |\sphericalangle CPA| = 90°$ ist das Viereck $AEPC$ ein Sehnenviereck. Da P und C auf derselben Seite der Geraden AE liegen, folgt $|\sphericalangle ACE| = |\sphericalangle APE|$ und wegen

$$|\sphericalangle APE| + |\sphericalangle DPB| = 90° = |\sphericalangle DPB| + |\sphericalangle PBD|$$

auch $|\sphericalangle APE| = |\sphericalangle PBD|$. Da weiterhin $|\sphericalangle CEA| = |\sphericalangle APB| = 90°$ gilt, sind die Dreiecke AEC und APB ähnlich. Damit werden die einander entsprechenden Seiten $\overline{AC}$ im Dreieck AEC bzw. $\overline{AB}$ im Dreieck APB jeweils durch die Höhe $\overline{EF}$ bzw. $\overline{PD}$ im gleichen Verhältnis geteilt, es gilt also

$$|AF| : |FC| = |AD| : |DB| \ .$$

Aus der Umkehrung des Strahlensatzes folgt $DF \parallel BC$.

560946 Lösung *7 Punkte*

Erste Lösung:

Wir beweisen zunächst, dass eine der drei Primzahlen durch 5 teilbar und damit gleich 5 ist.

Hierzu untersuchen wir die letzte Ziffer im Dezimalsystem. Da q eine Primzahl ist, muss die letzte Ziffer von q eine der Ziffern 1, 2, 3, 5, 7 oder 9 sein. Ist die letzte Ziffer eine 5, so ist q durch 5 teilbar. Die übrigen Fälle untersuchen wir wie folgt:

Fall 1: Die letzte Ziffer von q ist eine 2.
Dann ist $q = 2$ und $p \cdot r = q^2 + 6 = 10$, also ist eine der Zahlen p oder r durch 5 teilbar.

Fall 2: Die letzte Ziffer von q ist eine 3 oder eine 7.
Dann ist die letzte Ziffer von q^2 eine 9, die letzte Ziffer von $p \cdot r = q^2 + 6$ ist also eine 5. Folglich ist eine der Zahlen p oder r durch 5 teilbar.

Fall 3: Die letzte Ziffer von q ist eine 1 oder eine 9.
Dann ist die letzte Ziffer von q^2 eine 1, die letzte Ziffer von $p \cdot r = q^2 + 6$ ist also eine 7. Da auch p und r auf eine der Ziffern 1, 2, 3, 5, 7 oder 9 enden, sind die letzten Ziffern von p und r also 1 und 7 oder 3 und 9. In jedem Fall ist die letzte Ziffer von $r - p$ gleich 4 oder 6. Andererseits gilt $r - p = q - 1$ und $q - 1$ endet auf eine der Ziffern 0 oder 8. Dies ist ein Widerspruch, dieser Fall tritt daher nicht auf.

Damit ist gezeigt, dass eine der drei Primzahlen durch 5 teilbar ist und damit gleich 5 sein muss.

Aus $q = 5$ folgt $p \cdot r = 31$, was keine Lösung in Primzahlen p und r hat.

Aus $p = 5$ erhält man $4 + q = r$ und $5\,r = q^2 + 6$ und weiter durch Einsetzen und Umformen nacheinander

$$20 + 5\,q = q^2 + 6\,,$$
$$q^2 - 5\,q - 14 = 0\,,$$
$$(q - 7)\,(q + 2) = 0\,,$$

also $q = 7$ und daher $r = 11$.

Aus $r = 5$ folgt $p + q = 6$ und somit direkt $p = q = 3$.

Eine Probe bestätigt, dass die Tripel $(3, 3, 5)$ und $(5, 7, 11)$ tatsächlich Lösungen des Gleichungssystems sind.

Zweite Lösung:

Wir setzen $r = p + q - 1$ in die zweite Gleichung ein und formen diese nacheinander um zu

$$p \cdot (p + q - 1) = q^2 + 6\,,$$
$$p^2 - p - 6 = q^2 - p \cdot q\,,$$
$$(p + 2) \cdot (p - 3) = q \cdot (q - p)\,. \tag{1}$$

Fall 1: $p = 2$.
Dann ist die linke Seite von (1) negativ, die rechte Seite wegen $q \geq 2$ aber nicht negativ. Dieser Fall tritt also nicht auf.

Fall 2: $p = 3$.
Dann wird aus (1) die Gleichung $q \cdot (q - 3) = 0$. Da q positiv ist, folgt hieraus $q = 3$ und damit $r = 5$.

Fall 3: $p \geq 5$.
Dann ist die linke Seite von (1) positiv. Damit die rechte Seite auch positiv ist, muss $q > p$ gelten. Aus $p \geq 5$ folgt dann $q \geq p + 2$. Nun ist die Primzahl q ein Teiler des Produktes $(p + 2) \cdot (p - 3)$, also teilt q einen der beiden Faktoren. Auf jeden Fall gilt dann $q \leq p + 2$. Insgesamt erhält man $q = p + 2$, und Einsetzen in (1) liefert $p - 3 = 2$, also $p = 5$ und demnach $q = 7$, $r = 11$.

Eine Probe bestätigt, dass die Tripel $(3, 3, 5)$ und $(5, 7, 11)$ tatsächlich Lösungen des Gleichungssystems sind.