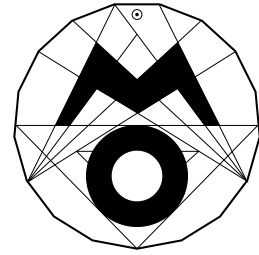


56. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklasse 11
Aufgaben – 1. Tag



© 2017 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

561141

Für zwei reelle Zahlen p und q wird das folgende Gleichungssystem für die reellen Unbekannten x und y betrachtet:

$$\begin{aligned}x^2 + py + q &= 0, \\y^2 + px + q &= 0.\end{aligned}$$

Man bestimme die Anzahl der paarweise verschiedenen Lösungspaare (x, y) in Abhängigkeit von p und q .

561142

Gegeben sei ein Dreieck ABC mit einem rechten Winkel bei C . Man beweise, dass es auf seinem Umkreis einen Punkt $D \neq A$ mit der folgenden Eigenschaft gibt: Liegen die Punkte M und N so außerhalb des Umkreises auf den Strahlen AB beziehungsweise AC , dass $|BM| = |CN|$ gilt, dann verläuft der Umkreis des Dreiecks AMN durch D .

561143

General Tilly und der Herzog von Wallenstein spielen „Teile und herrsche!“ (Divide et impera!). Dazu gruppieren sie N Zinnsoldaten in M Kompanien und kommandieren abwechselnd. Jeder muss, wenn er an der Reihe ist, ein Kommando geben und es sofort ausführen.

Es sind nur zwei Kommandos möglich: Auf das Kommando „Teile!“ wird eine Kompanie ausgewählt und in zwei Kompanien aufgeteilt, deren Größe der jeweils Kommandierende frei wählen kann; es muss lediglich jede Kompanie mindestens einen Zinnsoldaten umfassen. Wird aber das Kommando „Herrsche!“ gegeben, so wird aus jeder Kompanie ein Zinnsoldat entfernt und eingeschmolzen.

Verloren hat, wessen Kommando zum Verlust einer Kompanie führt. Wallenstein beginnt mit dem Kommandieren.

- Kann er erzwingen, dass Tilly verliert, wenn am Anfang sieben Kompanien von je sieben Zinnsoldaten zur Verfügung stehen?
- Wer verliert, wenn am Anfang $M \geq 1$ Kompanien mit $n_1 \geq 1, n_2 \geq 1, \dots, n_M \geq 1$ ($n_1 + n_2 + \dots + n_M = N$) Zinnsoldaten aufgestellt werden?