56. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklasse 10
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

561044

Bestimmen Sie die Anzahl natürlicher Zahlen a zwischen 1 und 100 000 (jeweils einschließlich), für die gilt: Unter den Teilern von a befinden sich genau sieben Quadratzahlen.

Hinweis: Zu den Teilern einer natürlichen Zahl a gehören sowohl 1 als auch a selbst.

561045

Es sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck und P ein innerer Punkt der Seite $\overline{BC}$. Der Fußpunkt des von P auf die Seite $\overline{AB}$ gefällten Lotes sei D. Auf der Strecke $\overline{PD}$ sei weiter ein innerer Punkt E gegeben, für den $|\sphericalangle CEA| = |\sphericalangle CPA|$ gilt. Der Fußpunkt des von E auf die Seite $\overline{AC}$ gefällten Lotes sei mit F bezeichnet.

Beweisen Sie, dass die Geraden DF und BC parallel sind.

561046

Die Funktion $f(x) = x^3 + q\,x + r$ heiße *zulässig*, wenn q und r reelle Zahlen mit $r \neq 0$ sind und $\frac{q}{r} \geq 1$ gilt.

Wir betrachten die Menge M der Paare (a, b) reeller Zahlen mit der folgenden Eigenschaft:

Jede zulässige Funktion hat eine Nullstelle x_0 mit $a \leq x_0 \leq b$.

Beweisen Sie:

a) Das Paar $(a, b) = \left(-\frac{3}{2}, 3\right)$ gehört zu M.
b) Wenn das Paar (a, b) zu M gehört, dann ist $b \geq 3$.
c) Wenn das Paar $(a, 3)$ zu M gehört, dann ist $a \leq -\frac{3}{2}$.

Hinweis: Haben die Funktionswerte einer Funktion $f(x)$ der hier betrachteten Art für $x = a$ und $x = b$ verschiedenes Vorzeichen, so hat $f(x)$ eine Nullstelle mit $a \leq x \leq b$. Diese Aussage kann ohne Beweis verwendet werden.