56. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklasse 10
Aufgaben – 1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

561041

Tom fährt mit seinem E-Bike von seiner Arbeitsstelle nach Hause. Er fährt um 19:00 Uhr los. Auf den ersten 4 km geht es bergab, dort fährt er mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 30 km/h. Es folgen 12 km ebener Radweg, den er mit 20 km/h zurücklegt. Dann muss er einen Berg hinauf fahren; auf der Strecke von 3 km Länge bringt er es lediglich auf 10 km/h. Abschließend fährt er noch mal auf ebener Strecke 5 km mit einer Geschwindigkeit von 15 km/h.

Um schneller voranzukommen, kann er den Elektromotor seines Fahrrads dazuschalten. Dadurch erhöht sich seine Geschwindigkeit um 5 km/h. Allerdings ist der Akku schon recht leer, so dass er das nur für insgesamt 10 Minuten tun kann.

Wann kann er frühestens zu Hause sein?

561042

Gegeben ist ein Dreieck ABC mit $|AB| = 1$ und $|\sphericalangle CBA| = 120°$. Auf der Seite $\overline{AC}$ liegt ein Punkt D so, dass $|CD| = 1$ und $|\sphericalangle DBA| = 90°$ gilt.

Bestimmen Sie die Länge $|AD|$.

561043

Von n gleich großen Bällen ist bekannt, dass jeder von ihnen in einer der sechs Farben Azur, Beige, Cyan, Distel, Elfenbein und Fuchsie bemalt ist. Weiterhin gibt es elf Kisten, beschriftet mit den Nummern $1, 2, \ldots, 11$, wobei jeweils in die Kiste mit der Nummer i maximal i Bälle hineinpassen. Die Bälle sollen nun so auf die Kisten verteilt werden, dass in jeder Kiste alle Bälle dieselbe Farbe haben.

a) Beweisen Sie, dass für $n = 57$ eine solche Verteilung nicht immer möglich ist.
b) Beweisen Sie, dass für $n = 56$ eine derartige Verteilung stets möglich ist.