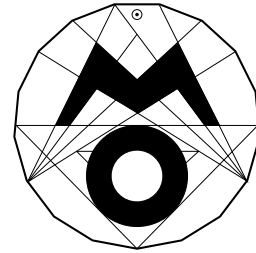


**56. Mathematik-Olympiade**  
**4. Stufe (Bundesrunde)**  
**Olympiadeklasse 9**  
**Aufgaben – 2. Tag**



© 2017 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*  
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

560944

Kai und Michael tauschen geheime Botschaften aus. Jede Botschaft besteht aus fünf Ziffern. Jede Ziffer ist entweder eine 0 oder eine 1.

Michael sendet eine Botschaft. Jede Ziffer kommt nur mit einer Wahrscheinlichkeit von  $\frac{9}{10}$  richtig bei Kai an. Mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{10}$  wird die falsche Ziffer empfangen. Zur Sicherheit wird dieselbe Botschaft stets zweimal hintereinander gesendet.

- Wie viele verschiedene solche Botschaften lassen sich bilden?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine Botschaft zweimal hintereinander richtig empfangen?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit gilt: „Es wurde zweimal dieselbe Ziffernfolge empfangen und in dieser Ziffernfolge sind genau zwei Ziffern falsch übertragen worden“?
- Kai empfängt zweimal hintereinander dieselbe Botschaft.  
Zeigen Sie, dass die Botschaft mit Wahrscheinlichkeit  $\left(\frac{81}{82}\right)^5$  richtig ist.

*Hinweis:* Die gesuchten Wahrscheinlichkeiten sind als gekürzte Brüche anzugeben. Es ist ausreichend, die Ergebnisse als Produkt oder Potenz von Brüchen (wie beispielhaft im letzten Teil der Aufgabenstellung geschehen) anzugeben.

560945

Es sei  $ABC$  ein spitzwinkliges Dreieck und  $P$  der Fußpunkt des Lotes von  $A$  auf die Seite  $\overline{BC}$ . Der Fußpunkt des von  $P$  auf die Seite  $\overline{AB}$  gefällten Lotes sei  $D$ . Auf der Strecke  $\overline{PD}$  sei weiter ein innerer Punkt  $E$  gegeben, für den  $|\sphericalangle CEA| = 90^\circ$  gilt. Der Fußpunkt des von  $E$  auf die Seite  $\overline{AC}$  gefällten Lotes sei mit  $F$  bezeichnet.

Beweisen Sie, dass die Geraden  $DF$  und  $BC$  parallel sind.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

560946

Bestimmen Sie alle Tripel  $(p, q, r)$  von Primzahlen, welche das Gleichungssystem

$$p + q = r + 1,$$

$$p \cdot r = q^2 + 6$$

erfüllen.