56. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklasse 9
Aufgaben – 1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

560941

Tom fährt mit seinem E-Bike von seiner Arbeitsstelle nach Hause. Er fährt um 19:00 Uhr los. Auf den ersten 4 km geht es bergab, dort fährt er mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 30 km/h. Es folgen 12 km ebener Radweg, den er mit 20 km/h zurücklegt. Dann muss er einen Berg hinauf fahren; auf der Strecke von 3 km Länge bringt er es lediglich auf 10 km/h. Abschließend fährt er noch mal auf ebener Strecke 5 km mit einer Geschwindigkeit von 15 km/h.

Um schneller voranzukommen, kann er den Elektromotor seines Fahrrads dazuschalten. Dadurch erhöht sich seine Geschwindigkeit um 5 km/h. Allerdings ist der Akku schon recht leer, so dass er das nur für insgesamt 10 Minuten tun kann.

Wann kann er frühestens zu Hause sein?

560942

Gegeben sei ein Dreieck ABC, ein Punkt P so auf der Geraden AB und ein Punkt Q so auf der Geraden AC, dass B zwischen A und P sowie C zwischen A und Q liegt. Weiter seien die Punkte P und Q so gewählt, dass die Gleichung

$$|PB| \cdot |QC| = |AB| \cdot |AC|$$

gilt.

Zeigen Sie, dass alle für das Dreieck ABC so konstruierbaren Geraden PQ einen Punkt gemeinsam haben.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

560943

Eine Gruppe von 25 Fußballbildsammlern hat per Internet festgestellt, dass sie miteinander tauschen könnten. Jeder von ihnen hat für jeden anderen genau ein Bild doppelt, das dem anderen noch fehlt, und all diese $24 \cdot 25 = 600$ Bilder sind paarweise verschieden. Da jeder der Sammler in einer anderen Stadt wohnt, müssten alle Bilder per Post verschickt werden. Wenn jeder an jeden anderen einen Brief verschickt, müssen insgesamt 600 Briefe mit jeweils einem Bild verschickt werden. Die Sammler überlegen gemeinsam, ob es nicht ein besseres Verfahren gibt.

a) Erläutern Sie ein Verfahren, bei dem jeder jeweils die richtigen 24 Bilder per Brief verschickt und die richtigen 24 Bilder per Brief erhält und bei dem insgesamt möglichst wenige Briefe verschickt werden. (Es müssen nicht alle Briefe gleichzeitig verschickt werden und in einem Brief dürfen beliebig viele Bilder gesendet werden.)

b) Beweisen Sie, dass das Verfahren optimal ist, dass es also kein solches Verfahren gibt, bei dem noch weniger Briefe verschickt werden.