56. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklasse 7
Lösungen – 2. Tag

560734 Lösung *6 Punkte*

Da der Holzwurm und die Schnecke sich nur tagsüber näher kommen, erreichen sie die gleiche Höhe am Tag.

Nach einem vollen Tag verringert sich die Differenz ihrer Höhen um $(\frac{1}{2}+1=)\ \frac{3}{2}$ Ellen. Der Tagesbeginn des Tages, an welchem sie die gleiche Höhe erreichen, muss daher der Tagesbeginn nach einer gleichen Anzahl an vollen Tagen und Nächten sein, an dem die Differenz ihrer Höhen noch höchstens $\frac{3}{2}$ Ellen beträgt.

In einer vollen Nacht vergrößert sich die Differenz ihrer Höhen um $(\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=)\ \frac{5}{12}$ Ellen. Insgesamt verringert sich die Differenz ihrer Höhen nach einem vollen Tag und einer vollen Nacht um $(\frac{3}{2}-\frac{5}{12}=)\ \frac{13}{12}$ Ellen.

Wegen $60-\frac{3}{2}=\frac{117}{2}$ und $\frac{117}{2}:\frac{13}{12}=\frac{117\cdot 6}{13}=54$ ist daher nach 54 Tagen und 54 Nächten zum Tagesbeginn des 55. Tages erstmals die Differenz ihrer Höhen höchstens $\frac{3}{2}$ Ellen. Da die Differenz ihrer Höhen dann aber gerade $\frac{3}{2}$ Ellen ist und sie tagsüber die Differenz ihrer Höhen um genau $\frac{3}{2}$ Ellen verringern, befinden sie sich genau am Ende des 55. Tages in gleicher Höhe.

Am 55. Tag haben der Holzwurm und die Schnecke erstmals die gleiche Höhe erreicht.

Lösungsvariante: Da der Holzwurm und die Schnecke sich nur tagsüber näher kommen, erreichen sie die gleiche Höhe am Tag. Nach Aufgabenstellung verringern der Holzwurm und die Schnecke jeden Tag ihren Höhenunterschied um $(\frac{1}{2}+1=)\ \frac{3}{2}$ Ellen. In jeder Nacht vergrößert sich der Höhenunterschied wieder um $(\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=)\ \frac{5}{12}$ Ellen. Da anfangs der Höhenunterschied 60 Ellen ist, muss für die Anzahl k der Tage zur Überwindung des Höhenunterschieds

$$\begin{aligned}
60 &\le k\cdot\frac{3}{2}-(k-1)\cdot\frac{5}{12}\,,\\
60 &\le k\cdot\frac{13}{12}+\frac{5}{12}\,,\\
60\cdot 12 &\le 13\cdot k+5\,,\\
715 &\le 13\cdot k
\end{aligned}$$

und daher $k\ge 55$ gelten.

Am 55. Tag haben der Holzwurm und die Schnecke die gleiche Höhe erreicht.

560735 Lösung *7 Punkte*

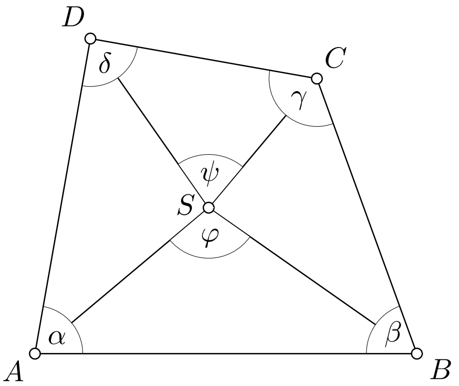
Teil a) Wir bezeichnen wie üblich $\alpha=|\sphericalangle BAD|$, $\beta=|\sphericalangle CBA|$, $\gamma=|\sphericalangle DCB|$ und $\delta=|\sphericalangle ADC|$. Weiter seien φ die Größe des Winkels $\sphericalangle ASB$ und ψ die Größe des Winkels $\sphericalangle CSD$, es gelte also $\varphi=|\sphericalangle ASB|$ und $\psi=|\sphericalangle CSD|$, siehe Abbildung L 560735 a.

Aus den Voraussetzungen und nach dem Innenwinkelsatz für Dreiecke angewandt auf die Dreiecke ABS und CDS folgt

$$\begin{aligned}\varphi + \psi &= \left(180° - \tfrac{\alpha}{2} - \tfrac{\beta}{2}\right) + \left(180° - \tfrac{\gamma}{2} - \tfrac{\delta}{2}\right)\\ &= 360° - \tfrac{\alpha}{2} - \tfrac{\beta}{2} - \tfrac{\gamma}{2} - \tfrac{\delta}{2}\\ &= 360° - \tfrac{1}{2} \cdot (\alpha + \beta + \gamma + \delta)\,.\end{aligned}$$

Nach dem Innenwinkelsatz für Vierecke gilt $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$. Daher folgt

$$\varphi + \psi = 360° - \frac{1}{2} \cdot (\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 180°\,.$$



L 560735 a

Die Winkel $\sphericalangle ASB$ und $\sphericalangle CSD$ ergänzen sich also zu 180°.

Teil b) Es gibt viele Wege, die Umkehrung durch ein Gegenbeispiel zu widerlegen.

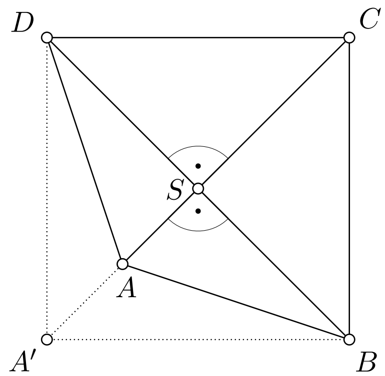
Wir betrachten zum Beispiel ein Quadrat $A'BCD$ mit dem Mittelpunkt S, siehe Abbildung L 560735 b. Da $A'BCD$ ein Quadrat ist, stehen die Geraden AC und BD senkrecht aufeinander, weswegen

$$|\sphericalangle A'SB| = |\sphericalangle CSD| = 90°$$

gilt. Wir wählen A als Mittelpunkt der Strecke $\overline{A'S}$ und betrachten das Viereck $ABCD$. Dann gilt

$$|\sphericalangle ASB| + |\sphericalangle CSD| = |\sphericalangle A'SB| + |\sphericalangle CSD| = 180°.$$

Daher sind die Voraussetzungen der Umkehrung erfüllt. Jetzt gilt aber $|\sphericalangle SBA| < |\sphericalangle SBA'| = |\sphericalangle CBS|$. Folglich ist BS nicht die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle CBA$.



L 560735 b

<u>560736 Lösung</u> *7 Punkte*

Teil a) Für die Änderung der Anzahl der Karten mit roter Oberseite nach einem Spielzug gibt es nur die folgenden drei Möglichkeiten: Werden zwei Karten mit blauen Oberseiten umgedreht, so erhöht sich die Anzahl der Karten mit roten Oberseiten um 2. Werden zwei Karten mit roten Oberseiten umgedreht, so verringert sich die Anzahl der Karten mit roten Oberseiten um 2. Werden zwei Karten umgedreht, bei denen die eine Karte eine blaue Oberseite und die andere Karte eine rote Oberseite hat, so ändert sich die Anzahl der Karten mit roten Oberseiten nicht. Folglich ändert sich die Anzahl der Karten mit roten Oberseiten nach einem Spielzug in jedem Fall um eine gerade Anzahl.

Da zu Beginn eine gerade Anzahl an Karten mit einer roten Oberseite vorlag, nämlich 0, kann nach der durchgeführten Fallunterscheidung nach einem Spielzug nicht eine ungerade Anzahl an Karten mit roter Oberfläche erreicht werden. Durch wiederholte Anwendung des Spielzuges kann also nicht erreicht werden, dass alle fünf Karten mit der roten Seite nach oben liegen.

Teil b) Durch wiederholte Anwendung des Spielzuges kann tatsächlich erreicht werden, dass alle fünf Karten mit der roten Seite nach oben liegen.

Um dies zu zeigen, geben wir eine mögliche Zugfolge an, wobei wir für jeden Spielzug eine Kurzschreibweise verwenden, die am folgenden Beispiel erläutert wird: $bbrbr \xrightarrow{1,2,5} rrrbb$ bedeutet: Gegeben sind fünf nebeneinanderliegende Karten, deren Oberseiten der Reihe nach die Farben blau, blau, rot, blau, rot haben. Es werden die Karten, welche in der Reihenfolge die Nummern 1, 2 und 5 haben, ausgewählt und umgedreht. Das Ergebnis sind fünf nebeneinanderliegende Karten, deren Oberseiten der Reihe nach die Farben rot, rot, rot, blau, blau haben.

Mit Hilfe dieser Kurzschreibweise ist

$$bbbbb \xrightarrow{1,2,3} rrrbb \xrightarrow{2,3,4} rbbrb \xrightarrow{2,3,5} rrrrr$$

ein Beispiel für eine Folge von Spielzügen derart, dass im Ergebnis alle fünf Karten mit der roten Seite nach oben liegen.

Teil c) Durch wiederholte Anwendung des Spielzuges kann tatsächlich für jede natürliche Zahl $n > 2$ erreicht werden, dass bei n Karten schließlich alle n Karten mit der roten Seite nach oben liegen.

Zum Beweis untersuchen wir die möglichen Reste der Zahl n bei Division durch 3 und zeigen, dass für jeden Rest eine Folge von Spielzügen derart existiert, dass im Ergebnis alle n Karten mit der roten Seite nach oben liegen.

Fall 1: Der Rest ist 0. Wegen $n > 2$ gilt $n = 3 + 3 \cdot k$ mit einer nichtnegativen ganzen Zahl k. In diesem Fall kann man offensichtlich im ersten Spielzug die ersten drei Karten und anschließend in den nächsten k Spielzügen die jeweils folgenden drei Karten umdrehen, so dass im Ergebnis alle Karten mit der roten Seite oben liegen.

Fall 2: Der Rest ist 1. Wegen $n > 2$ gilt $n = 4 + 3 \cdot k$ mit einer nichtnegativen ganzen Zahl k. In diesem Fall kann man zunächst die ersten vier Karten durch die Zugfolge

$$bbbb \xrightarrow{1,2,3} rrrb \xrightarrow{2,3,4} rbbr \xrightarrow{1,2,4} brbb \xrightarrow{1,3,4} rrrr$$

umdrehen, so dass im Ergebnis alle vier Karten mit der roten Seite oben liegen. Anschließend können analog zum Fall 1 in k Spielzügen die restlichen $3 \cdot k$ Karten umgelegt werden, so dass schließlich alle n Karten mit der roten Seite nach oben liegen.

Fall 3: Der Rest ist 2. Wegen $n > 2$ gilt $n = 5 + 3 \cdot k$ mit einer nichtnegativen ganzen Zahl k. In diesem Fall kann man zunächst die ersten fünf Karten wie in der Lösung zur Teilaufgabe b) umdrehen. Anschließend können analog zum Fall 1 in k Spielzügen die restlichen $3 \cdot k$ Karten umgelegt werden, so dass schließlich alle n Karten mit der roten Seite nach oben liegen.

Da die Fallunterscheidung vollständig ist, ist die Aussage bewiesen.

Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

Aufgabe 560734	*Insgesamt: 6 Punkte*
Lösungsansatz	1 Punkt
Begründung und Rechnung	4 Punkte
Korrektes Ergebnis	1 Punkt

Aufgabe 560735	*Insgesamt: 7 Punkte*
Teil a)	4 Punkte
Teil b)	3 Punkte

Aufgabe 560736	*Insgesamt: 7 Punkte*
Teil a)	2 Punkte
Teil b)	2 Punkte
Teil c)	3 Punkte