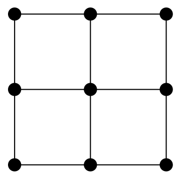
56. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklasse 5
Lösungen

© 2016 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

560531 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Ein Würfel besteht aus 12 Kanten und 8 Ecken. Somit werden 12 Hölzchen und 8 Knetekugeln benötigt.

Teil b) Der Quader besteht aus zwei Würfeln der Kantenlänge 5 cm. Für den nachträglich angefügten Würfel werden noch $(12 - 4 =)\,8$ Kanten und $(8 - 4 =)\,4$ Ecken benötigt. Somit kommen noch 8 Hölzchen und 4 Knetekugeln dazu.



Teil c) Ein Würfel mit 10 cm Kantenlänge besteht aus drei horizontalen Ebenen, die jeweils aus $(4 \cdot 2 + 4 =)\,12$ Hölzchen und $(3 \cdot 3 =)\,9$ Knetekugeln bestehen. Für die Anzahl der Hölzchen in einer horizontalen Ebene (s. Abbildung) kann man auch die parallelen Hölzchen zählen: Jeweils $3 \cdot 2$, also insgesamt $(6 + 6 =)\,12$ Hölzchen.

Zwei dieser Ebenen müssen jeweils durch 9 vertikal angeordnete Hölzchen miteinander verbunden werden. Um ein vollständiges Knetekugelgitter für einen Würfel mit 10 cm Kantenlänge zu erhalten, benötigt man folglich $(3 \cdot 12 + 2 \cdot 9 =)\,54$ Hölzchen und $(3 \cdot 9 =)\,27$ Knetekugeln.

560532 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Es gilt $375 + 81 + 829 = 1285$. Folglich ist dieses Ergebnis um $(1285 - 1265 =)\,20$ zu groß gegenüber der Zielvorgabe. Um das Ergebnis der Addition um 20 zu verringern, muss die 2 an der Zehnerstelle des dritten Summanden 829 durch eine Null ersetzt werden.

Probe: $375 + 81 + 809 = 1265$.

Teil b) Es gilt $693 - 25 - 187 = 481$. Folglich ist dieses Ergebnis um $(566 - 481 =)\,85$ zu klein gegenüber der Zielvorgabe. Es wird 85 weniger subtrahiert, wenn im ersten Subtrahenden die Einerziffer 5 und im zweiten Subtrahenden die Zehnerziffer 8 jeweils durch eine Null ersetzt werden.

Probe: $693 - 20 - 107 = 566$.

Teil c) Wie bereits im Aufgabenteil b) ermittelt, beträgt das Ergebnis der gestellten Aufgabe 481. Dieses Ergebnis ist um $(481 - 398 =)\,83$ zu groß gegenüber der Zielvorgabe. Ein Ersetzen von Ziffern des Minuenden durch Nullen verringert das Ergebnis. Der Minuend besitzt aber an seiner Zehnerstelle keine 8. Wird stattdessen die 9 an der Zehnerziffer des Minuenden durch eine Null ersetzt, verringert sich das Ergebnis um 90, also um $(90 - 83 =)\,7$ zu viel. Deshalb muss auch die 7 an der Einerstelle des zweiten Subtrahenden durch eine Null ersetzt werden.

Probe: $603 - 25 - 180 = 398$.

Hinweis zur Lösungsfindung:

Es ist günstig, die Summanden untereinander zu schreiben und dann zu probieren, welche der drei Einerstellen und welche der drei Zehnerstellen man durch eine Null ersetzen muss, damit man das angegebene Ergebnis erhält. Dies führt zu folgenden Ergebnissen:

Teil a)

	3	7	5			3	7	5
+		8	1		+		8	1
+	8	2	9		+	8	**0**	9
1	2	8	5		1	2	***6***	5

Teil b)

	6	9	3			6	9	3
−		2	5		−		2	**0**
−	1	8	7		−	1	**0**	7
	4	8	1			***5***	***6***	***6***

Teil c)

	6	9	3			6	**0**	3
−		2	5		−		2	5
−	1	8	7		−	1	8	**0**
	4	8	1			***3***	***9***	***8***

<u>560533 Lösung</u> *10 Punkte*

Teil a) Da die Klasse 5a in jeder Stunde genau einen Kilometer mehr zurücklegt als die Klasse 5b, folgt, dass die Klasse 5a in den vergangenen 90 Minuten (= 1,5 Stunden) 1,5 Kilometer mehr zurückgelegt hat als die Klasse 5b.

Die Klasse 5b ist also noch 1,5 Kilometer vom Ziel entfernt.

Teil b) Die Klasse 5b hat bereits 6 Kilometer des Weges geschafft und noch 1,5 Kilometer vor sich. Die Länge der gesamten Strecke beträgt folglich $(6 + 1{,}5 =)$ 7,5 Kilometer.

Teil c) Die Klasse 5a legt die Strecke von 7,5 Kilometern in 90 Minuten zurück. Sie schafft also in 30 Minuten $(7{,}5 : 3 =)$ 2,5 Kilometer und deswegen in einer Stunde $(2{,}5 \cdot 2 =)$ 5 Kilometer.

Die Klasse 5b benötigt 90 Minuten für die Strecke von 6 Kilometern. Diese Klasse schafft also in einer Stunde $(6 : 3 \cdot 2 =)$ 4 Kilometer.

Teil d) Die Klasse 5c benötigt für 6 Kilometer genau 60 Minuten, also schafft sie einen Kilometer in 10 Minuten und 0,5 Kilometer in 5 Minuten. Für die gesamten 7,5 $(= 6 + 1 + 0{,}5)$ Kilometer benötigt die Klasse $(60 + 10 + 5 =)$ 75 Minuten. Da die Klasse 5c genau 15 Minuten später als ihre Parallelklassen startet, ist die 5c genau $(75 + 15 =)$ 90 Minuten nach dem Start der Parallelklassen im Ziel. Sie erreicht das Ziel also zeitgleich mit der Klasse 5a und holt diese Klasse demnach nicht vor dem Ziel ein. Die Klasse 5b ist noch nicht im Ziel angelangt und wurde von der Klasse 5c eingeholt. Mithilfe einer Tabelle lässt sich bestimmen, nach wie vielen Kilometern dies geschieht:

Zeit in Minuten	0	15	30	45	60	75	90
Weg in km Klasse 5b	0	1	2	3	4	5	6
Weg in km Klasse 5c	0	0	1,5	3	4,5	6	7,5

Nach drei Kilometern holt die Klasse 5c die Klasse 5b ein.

560534 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Es gibt folgende vier Rundwege:

Rundwege	Anzahl Stempel
$A-B-C-A$	$2+3+3=8$
$A-B-D-A$	$2+2+4=8$
$A-D-C-A$	$4+2+3=9$
$B-C-D-B$	$3+2+2=7$

Die meisten Stempel bekommt Steffen auf dem Weg $A-D-C-A$ und die wenigsten auf dem Rundweg $B-C-D-B$.

Teil b) Er kann folgende Wege laufen:

$$A{-}B{-}C{-}D,\ A{-}B{-}D{-}C,\ A{-}C{-}B{-}D,\ A{-}C{-}D{-}B,\ A{-}D{-}B{-}C,\ A{-}D{-}C{-}B.$$

Er hat also sechs verschiedene Möglichkeiten.

Teil c) Die drei Wege mit den meisten Stempeln sind die Verbindungen $A-D$, $A-C$ und $B-C$. Wenn er diese zu einer Wanderung verbindet, erhält er die meisten Stempel. Die Wanderstrecke mit den meisten Stempeln (10 Stück) ist demzufolge $D-A-C-B$.

Die drei Wege mit den wenigsten Stempeln sind die Abschnitte $A-B$, $B-D$ und $D-C$. Die wenigsten Stempel (6 Stück) erhält Steffen auf der Wanderstrecke $A-B-D-C$.

Teil d) Um eine solche Änderung zu erreichen, versuchen wir die Anzahl der Stempelstellen auf der Strecke $A-D-C-A$ zu erhöhen und gleichzeitig diese Anzahl auf der Strecke $B-C-D-B$ zu vermindern. Das gelingt zum Beispiel dadurch, dass wir eine Stempelstelle vom Weg $B-C$ wegnehmen und zusätzlich eine auf dem Weg $A-D$ einrichten. Die Anzahl der Stempelstellen auf den Rundstrecken wäre dann 7 $(A-B-C-A)$, 9 $(A-B-D-A)$, 10 $(A-D-C-A)$ und 6 $(B-C-D-B)$, also sämtlich verschieden.

Eine weitere Möglichkeit erhält man durch Verschieben einer Stempelstelle zwischen den Wegen $B-D$ und $C-A$.

Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

Aufgabe 560531	*Insgesamt: 10 Punkte*
Teil a)	3 Punkte
Teil b)	3 Punkte
Teil c)	4 Punkte

Aufgabe 560532	*Insgesamt: 10 Punkte*
Teil a)	3 Punkte
Teil b)	3 Punkte
Teil c)	4 Punkte

Aufgabe 560533	*Insgesamt: 10 Punkte*
Teil a)	2 Punkte
Teil b)	2 Punkte
Teil c)	3 Punkte
Teil d)	3 Punkte

Aufgabe 560534	*Insgesamt: 10 Punkte*
Teil a)	4 Punkte
Teil b)	2 Punkte
Teil c)	2 Punkte
Teil d)	2 Punkte