56. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklassen 11 und 12
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

561234

Man ermittle die kleinste positive ganze Zahl n, die durch 100 teilbar ist und (einschließlich der Zahlen 1 und n) genau 100 Teiler besitzt.

561235

In einem rechtwinkligen Dreieck bezeichne r den Inkreisradius, s_a und s_b seien die Längen der Seitenhalbierenden der Katheten a und b.

Man beweise, dass dann stets die Ungleichung

$$\frac{r^2}{s_a^2 + s_b^2} \leq \frac{3 - 2\sqrt{2}}{5}$$

gilt.

561236

Man bestimme alle Paare (x, y) reeller Zahlen, die das Gleichungssystem

$$x \cdot \sqrt{1 - y^2} = \frac{1}{4}(\sqrt{3} + 1)\,,$$
$$y \cdot \sqrt{1 - x^2} = \frac{1}{4}(\sqrt{3} - 1)$$

erfüllen.