56. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Olympiadeklassen 11 und 12
Lösungen

561221 Lösung *10 Punkte*

Angenommen, a, b, c sind Lösungen des Gleichungssystems. Einsetzen von (1) in (2) liefert

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + 1 &= 2a \cdot b + 2\,, \\ a^2 + b^2 - 2a \cdot b &= 1\,, \\ (a-b)^2 &= 1\,. \end{aligned}$$

Somit ist $a - b = 1$ oder $a - b = -1$.

Fall 1: $a = b + 1$. Aus (1) und (3) folgt durch Gleichsetzen

$$\begin{aligned} a \cdot b + 1 &= 2a + b\,, \\ (b+1) \cdot b + 1 &= 2\,(b+1) + b\,, \\ b^2 + b + 1 &= 2b + 2 + b\,, \\ b^2 - 2b - 1 &= 0\,, \\ b &= 1 \pm \sqrt{2}\,. \end{aligned}$$

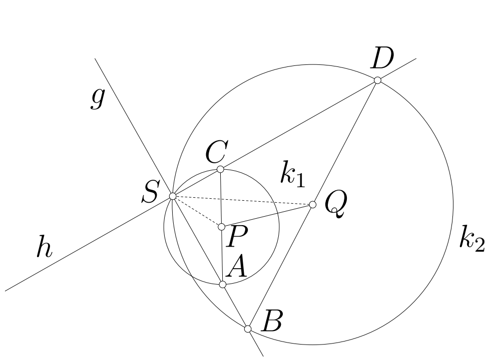
Somit ist b nicht ganzzahlig. Dieser Fall ergibt also keine Lösung.

Fall 2: $a = b - 1$. Wie in Fall 1 findet man

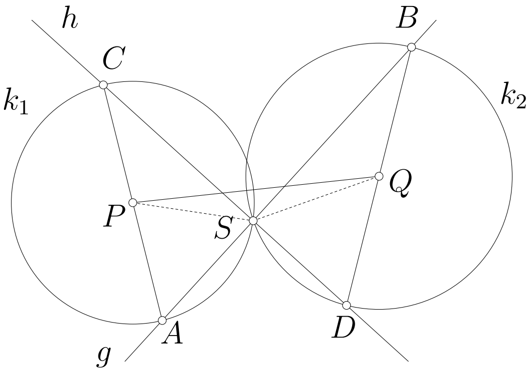
$$\begin{aligned} (b-1) \cdot b + 1 &= 2\,(b-1) + b\,, \\ b^2 - b + 1 &= 2b - 2 + b\,, \\ b^2 - 4b + 3 &= 0\,, \\ b &= 2 \pm \sqrt{1}\,. \end{aligned}$$

Für $b = 1$ ergeben sich $a = 0$ und $c = 1$.
Für $b = 3$ ergeben sich $a = 2$ und $c = 7$.

Die Probe zeigt, dass sowohl $a = 2$, $b = 3$, $c = 7$ als auch $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$ Lösungen des Gleichungssystems sind.



L 561222 a



L 561222 b

Wir bezeichnen die Gerade AB mit g und die Gerade CD mit h. Die Abbildungen L 561222 a–b zeigen Beispiele verschiedener Lagen für einen Schnittpunkt S der Geraden g und h, bei denen die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind.

Erster Schritt: Angenommen, es existiert ein solcher Schnittpunkt S. Gegebenenfalls kann S mit A, B, C oder D zusammenfallen. Ist das nicht der Fall, dann sind die Dreiecke ACS und BDS rechtwinklig mit dem rechten Winkel jeweils bei S. Nach der Umkehrung des Thalessatzes sind die Strecken $\overline{PS}$ und $\overline{QS}$ Radien der jeweiligen Umkreise dieser Dreiecke und haben die Längen a bzw. b. Diese Aussage über die Längen gilt auch in dem Fall, dass S mit A, B, C oder D zusammenfällt. Es existiert dann in allen Fällen ein (möglicherweise ausgeartetes) Dreieck mit den Seitenlängen a, b und d, nämlich das Dreieck PQS.

Zweiter Schritt: Wenn umgekehrt die Streckenlängen $2a$, $2b$ und d so gewählt sind, dass ein Dreieck mit den Seitenlängen a, b und d existiert, so konstruiert man ein solches Dreieck mit $\overline{PQ}$ als der Seite der Länge d und einem dritten Punkt S so, dass $|PS| = a$ und $|QS| = b$ gilt. Als A wählt man einen beliebigen Punkt des Kreises k_1 um P mit Radius a; dabei möge, um das Zusammenfallen von Punkten zu vermeiden, A nicht auf den Geraden PS, QS oder PQ liegen und $\sphericalangle QSA$ kein rechter Winkel sein. Der zu A diametrale Punkt auf k_1 sei C.

Es sei g die Gerade durch A und S, und h sei die Gerade durch C und S. Aufgrund ihrer Konstruktion stehen g und h nach dem Thalessatz senkrecht aufeinander. Es sei nun k_2 der Kreis mit Radius b um Q. Der Punkt S ist ein gemeinsamer Punkt von g und k_2 (sowie von h).

Wegen $|\sphericalangle QSA| \neq 90°$ ist g keine Tangente an k_2 und schneidet daher k_2 in einem weiteren Punkt B. Der zu B diametrale Punkt auf k_2 sei D. Nach dem Thalessatz ist $\sphericalangle BSD$ ein rechter Winkel. Also liegt D auf h.

Nach Konstruktion ist dann P tatsächlich der Mittelpunkt von $\overline{AC}$, Q der Mittelpunkt von $\overline{BD}$, und die Geraden g durch A und B sowie h durch C und D stehen senkrecht aufeinander, sodass die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind.

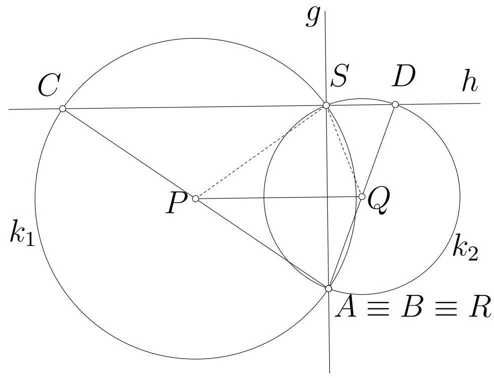
Dritter Schritt: Aufgrund der beiden vorigen Schritte sind die Forderungen der Aufgabe genau dann erfüllbar, wenn ein Dreieck existiert, das die Seitenlängen a, b und d besitzt. Dieses Dreieck darf ausgeartet sein.

Das ist genau dann der Fall, wenn die Bedingungen

$$a + b \geq d \geq |a - b|$$

erfüllt sind.

Bemerkungen: 1. Erlaubt man das Zusammenfallen von Endpunkten der beschriebenen beiden Strecken mit den Längen $2a$ und $2b$ und versteht dabei „Gerade AB“ sinngemäß als „eine Gerade durch A und B“ und entsprechend für CD, so wird die Konstruktion einer geforderten Anordnung einfacher. Dazu konstruiert man ein Dreieck mit $\overline{PQ}$ als der Seite der Länge d und einem dritten Punkt R so, dass $|PR| = a$ und $|QR| = b$ gilt. Wählt man $A \equiv B \equiv R$ und verlängert die Strecken $\overline{RP}$ und $\overline{RQ}$ über P bzw. Q hinaus um die Längen a bzw. b, so erhält man die Punkte C und D als neue Endpunkte (vgl. Abbildung L 561222 c).



L 561222 c

2. Wird im zweiten Schritt die Einschränkung $|\sphericalangle QSA| \neq 90°$ für A nicht gemacht, so wird in der nachfolgenden Konstruktion eine Diskussion der Sonderfälle erforderlich, in denen g Tangente an k_2 ist.

<u>561223 Lösung</u> *10 Punkte*

Erste Lösung: Wir berechnen zunächst einige Glieder der Folge:

$$x_2 = \frac{1+1}{1+3}\left(x_1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{4}\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{6},$$
$$x_3 = \frac{2+1}{2+3}\left(x_2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{5}\left(\frac{2}{6} + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{6},$$
$$x_4 = \frac{3+1}{3+3}\left(x_3 + \frac{1}{2}\right) = \frac{4}{6}\left(\frac{3}{6} + \frac{1}{2}\right) = \frac{4}{6}.$$

Dies legt die Vermutung nahe, dass

$$x_n = \frac{n}{6} \tag{1}$$

für alle $n \geq 1$ gilt. Um die Allgemeingültigkeit dieser Formel zu beweisen, nehmen wir an, dass (1) für ein Folgenglied x_n gilt. Damit ergibt sich für das nächste Glied der Folge

$$x_{n+1} = \frac{n+1}{n+3}\left(x_n + \frac{1}{2}\right) = \frac{n+1}{n+3}\left(\frac{n}{6} + \frac{1}{2}\right) = \frac{n+1}{n+3} \cdot \frac{n+3}{6} = \frac{n+1}{6}.$$

Die Formel (1) gilt deshalb auch für den Nachfolger von n. Die (bereits bestätigte) Gültigkeit für $n = 1$ impliziert somit die Korrektheit von (1) für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$. Für $n = 2016$ erhält man speziell

$$x_{2016} = \frac{2016}{6} = 336.$$

Zweite Lösung: Es sei $y_n = x_n - n/6$ für jedes $n \geq 1$. Dann ist $y_1 = 0$, und aus der Bildungsvorschrift für x_{n+1} folgt

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= x_{n+1} - \frac{n+1}{6} \\
&= \frac{n+1}{n+3}\left(x_n + \frac{1}{2}\right) - \frac{n+1}{6} \\
&= \frac{n+1}{n+3}\left(y_n + \frac{n}{6} + \frac{1}{2}\right) - \frac{n+1}{6} \\
&= \frac{n+1}{6}\left(\frac{1}{n+3}\,(6y_n + n + 3) - 1\right) \\
&= \frac{n+1}{n+3}\,y_n\,,
\end{aligned}$$

also ist $y_n = 0$ für jedes $n \geq 1$ und damit $x_n = n/6$.

<u>561224 Lösung</u> *10 Punkte*

Erste Lösung: Es gibt nur für $n = 1, 2, 3$ solche Quadratzahlen.

Man findet $2^2 = 4$, $12^2 = 144$ und $38^2 = 1444$. Es wird indirekt gezeigt, dass für $n = 4$ keine solche Quadratzahl existiert, wodurch sofort auch $n > 4$ ausgeschlossen ist.

Angenommen, es gäbe eine Quadratzahl k^2, deren letzte 4 Ziffern gleich 4 sind. Dann lässt sich

$$k^2 = 10^4 \cdot a + 4444 \tag{1}$$

mit einer ganzen Zahl a schreiben. Wegen $4|k^2$ ist dann auch $k^2/4 = (k/2)^2$ das Quadrat einer positiven ganzen Zahl. Es folgt

$$\frac{k^2}{4} = \frac{10^4}{4} \cdot a + 1111 = 25 \cdot 10^2 \cdot a + 11 \cdot 100 + 11\,,$$

die Quadratzahl $k^2/4$ endet also in Dezimaldarstellung auf die Ziffern 11.

Die Zahl $k/2$ muss in Dezimaldarstellung auf eine der Ziffern 1 oder 9 enden, denn die letzte Ziffer von $k^2/4$ ist gleich 1. Folglich gilt $k/2 = 10b \pm 1$ mit einer ganzen Zahl b und

$$\left(\frac{k}{2}\right)^2 = 100b^2 \pm 20b + 1\,.$$

Somit hat $k^2/4$ eine gerade Zehnerziffer, kann also nicht auf 11 enden.

Die Existenz einer Quadratzahl im Sinne der Aufgabenstellung ist damit für $n \geq 4$ ausgeschlossen.

Zweite Lösung: Die Fälle $n = 1, 2, 3$ werden wie in der 1. Lösung behandelt.

Für $n \geq 4$ liefert eine Betrachtung von Gleichung (1) hinsichtlich der Reste bei Division durch 16 direkt, dass k^2 den Rest 12 lassen muss. Die Zahl k^2 ist also durch 4, nicht aber durch 8 teilbar. Damit ist k das Doppelte einer ungeraden Zahl. Es ist folglich

$$k^2 = (2(2a+1))^2 = 16a^2 + 16a + 4 = 16b + 4$$

mit einer geeigneten ganzen Zahl a und $b = a^2 + a$. Dies steht jedoch im Widerspruch dazu, dass k^2 bei Division durch 16 den Rest 12 lässt.

Folglich gibt es für $n \geq 4$ keine Quadratzahl im Sinne der Aufgabenstellung.

Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

Aufgabe 561221 — *Insgesamt: 10 Punkte*

Erste Umformungen und zweckmäßige Fallunterscheidung .... 3 Punkte

Behandlung der Fälle durch geeignete Substitutionen oder Gleichsetzungen bis zur Gewinnung von Lösungskandidaten .... 5 Punkte

Probe .... 2 Punkte

Aufgabe 561222 — *Insgesamt: 10 Punkte*

Nachweis, dass bei Erfüllung der Bedingungen der Aufgabe ein Dreieck mit den Seitenlängen a, b und d existiert .... 3 Punkte

> *Wenn hierbei nicht beachtet wird, dass das Zusammenfallen von S mit A, B, C oder D vermieden werden muss, so ist dies eine kleine Beweislücke, die in jedem Fall bei der Korrektur ausgewiesen werden sollte, für die aber nicht mehr als ein Punkt abgezogen werden sollte.*

Nachweis, dass bei Existenz eines solchen Dreiecks die Bedingungen der Aufgabe erfüllt werden können .... 5 Punkte

> *Eine Nichtbeachtung spezieller Lagen für A, vgl. die 2. Bemerkung, stellt auf jeden Fall eine Lücke dar; diese sollte aber in der Bewertung nicht zu hart bestraft werden. Eine Konstruktion, die im allgemeinen Fall (d. h. mit Ausnahme spezieller Lagen) korrekt und vollständig ist, sollte in diesem Teilschritt nicht mit weniger als 3 Punkten bewertet werden.*

Bedingung für die Existenz des Dreiecks (Dreiecksungleichung) .... 2 Punkte

Aufgabe 561223	*Insgesamt: 10 Punkte*
Vermutung $x_n = n/6$ und erkennbarer Beweisansatz für den Nachweis dieser Vermutung	4 Punkte
davon bei einem Vorgehen im Sinne der ersten Lösung bis zu 2 Punkte für Anfangsfälle, die auf die Vermutung führen können	
Vollständig korrekte Ausführung des Beweises	5 Punkte
Schluss auf $n = 2016$ und Angabe des Ergebnisses	1 Punkt

Aufgabe 561224	*Insgesamt: 10 Punkte*
Beispiele für $n = 1, 2, 3$ (je Beispiel 1 Punkt)	3 Punkte
Fall $n \geq 4$	7 Punkte
davon: Erkenntnis, dass nur $n = 4$ betrachtet werden muss	2 Punkte
Überzeugende Behandlung des Falls $n = 4$	5 Punkte