56. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Olympiadeklasse 10
Lösungen

561021 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Die ersten drei Zahlen in Zeile fünf sind 48, 64 und 80.

1	2	3	4	5	…
3	5	7	9	11	…
8	12	16	20	…	
20	28	36	44	…	
48	64	80	…		
⋱	⋱	⋱			

Teil b) Man berechnet die k-te Zahl in der Zeile z, indem man die k-te und die $(k+1)$-te Zahl aus der Zeile $z-1$ addiert. Damit ergibt sich als 2016. Zahl in Zeile zwei: $2016+2017=4033$. Um die 2016. Zahl in der dritten Zeile zu ermitteln, benötigt man die 2016. und die 2017. Zahl aus Zeile zwei. An der 2017. Stelle der zweiten Zeile steht die Zahl $2017+2018=4035$. Damit ist $4033+4035=8068$ die 2016. Zahl in Zeile drei.

Teil c) Werden die Zahlen einer Zeile von links nach rechts größer, so werden auch die Summen zweier benachbarter Zahlen dieser Zeile größer. Damit gilt für die Zahlen der folgenden Zeile, dass sie von links nach rechts ebenfalls größer werden.

In der ersten Zeile sind die Zahlen so geordnet, dass sie größer werden, damit ergibt sich, dass in allen Zeilen der Zahlenmauer die Zahlen von links nach rechts größer werden. Damit kann die 2016 höchstens einmal pro Zeile vorkommen. Des Weiteren ist die Zahl an der k-ten Stelle einer Zeile z stets größer als die Zahl an der k-ten Stelle der vorangegangenen Zeile.

In Zeile zwei steht an der k-ten Stelle die Summe

$$k+(k+1)=2\,k+1\,. \tag{1}$$

Damit stehen in dieser Zeile nur ungerade Zahlen, weshalb 2016 nicht in Zeile zwei vorkommen kann.

In der dritten Zeile steht wegen (1) an der k-ten Stelle die Summe

$$(2\,k+1)+(2\,(k+1)+1)=4\,k+4=4\,(k+1)\,. \tag{2}$$

In dieser Zeile stehen also die durch 4 teilbaren Zahlen ab 8. Man kann 2016 darstellen als $4\cdot(503+1)$. Damit steht 2016 an der 503. Stelle in Zeile drei.

An der k-ten Stelle der vierten Zeile steht wegen (2) die Summe

$$4\,(k+1)+4\,(k+2)=4\,(2\,k+3)=8\,k+12=8\,(k+1)+4\,. \tag{3}$$

In dieser Zeile stehen also die Zahlen, die bei Division durch 8 den Rest 4 lassen, ab 20. Nun ist 2016 durch 8 ohne Rest teilbar und somit nicht in Zeile vier enthalten.

In Zeile fünf steht an der k-ten Stelle wegen (3) die Summe

$$(8\,(k+1)+4)+(8\,(k+2)+4)=8\,(2\,k+3)+8=16\,k+32=16\,(k+2)\,. \tag{4}$$

In dieser Zeile stehen also die durch 16 teilbaren Zahlen ab 48. Nun ist 2016 durch 16 teilbar und wegen $2016 = 16 \cdot (124+2)$ steht 2016 an der 124. Stelle der fünften Zeile.

In Zeile sechs ergibt sich die Zahl an der Stelle k wegen (4) aus der Summe

$$16\,(k+2)+16\,(k+3)=16\,(2\,k+5)\,. \tag{5}$$

In der sechsten Zeile stehen damit nur Zahlen der Form $16\,m$ mit ungeradem m. Wegen $2016 = 16 \cdot 126$ kann 2016 nicht in Zeile sechs enthalten sein.

In der siebenten Zeile steht an der k-ten Stelle wegen (5) die Zahl

$$16\,(2\,k+5)+16\,(2\,(k+1)+5)=16\,(4\,k+12)=64\,(k+3)\,.$$

In Zeile sieben stehen somit nur Vielfache von 64. Da $2016 = 31 \cdot 64 + 32$ nicht durch 64 teilbar ist, steht 2016 nicht in Zeile sieben.

In den folgenden Zeilen der Zahlenmauer stehen nur noch Summen von Vielfachen von 64 und damit sind die Zahlen in allen folgenden Zeilen durch 64 teilbar. Da 2016, wie schon gezeigt, nicht durch 64 teilbar ist, kann die Zahl 2016 in keiner der Zeilen enthalten sein, die nach Zeile sieben folgen.

In der ersten, dritten und fünften Zeile kommt 2016 genau einmal vor, ansonsten nicht. Folglich kommt 2016 genau drei Mal in der Zahlenmauer vor.

561022 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich aus der Produktformel zu $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{125}$.

Teil b) Zunächst bestimmen wir die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass die Ameisen nach rechts bzw. links abbiegen. Beide Wahrscheinlichkeiten sind gleich groß. Da die Ameisen entweder geradeaus laufen oder abbiegen, beträgt die Wahrscheinlichkeit für das Abbiegen $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$. Damit ergibt sich für das Abbiegen nach rechts und das Abbiegen nach links jeweils die Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{5}$.

Der Weg einer Ameise wird durch deren Entscheidungen auf den durchlaufenen Gitterknoten eindeutig bestimmt. Wir protokollieren l, r bzw. g, wenn sich die Ameise dabei nach links bzw. rechts wendet oder aber geradeaus weitergeht, und geben einen Weg im Ereignisraum durch die Folge der Entscheidungen der Ameise an. Alle weiteren zahlenmäßigen Längenangaben beziehen sich auf die Einheit „Kästchenlänge“.

In den folgenden Berechnungen von Wahrscheinlichkeiten werden die Ereignisräume der möglichen Pfade untersucht, die eine Ameise von S aus durchlaufen kann. Dabei wird mehrfach die erste oder die zweite Pfadregel (Additions- bzw. Multiplikationssatz) verwendet.

Es ist für die Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten unerheblich, ob sich die Ameise von S aus in der ersten Sekunde nach oben, unten, rechts oder links bewegt, denn die jeweiligen Ereignisteilräume kann man durch Drehen des Gitters auf den Ereignisteilraum abbilden, in dem die Ameise zunächst nach rechts geht. In allen vier Ereignisteilräumen ist deshalb die Wahrscheinlichkeit, dass die Ameise nach 8 Sekunden wieder im Ausgangspunkt S angekommen ist und dabei die Umfangslinie eines Rechtecks genau einmal abgelaufen hat, gleich. Wir können unsere Untersuchungen also auf den Ereignisteilraum beschränken, in dem die Ameise von S aus zunächst eine Einheit nach rechts läuft, und nur die Entscheidungen der Ameise in den Sekunden zwei bis acht betrachten.

Die Umfangslinie des zu umlaufenden Rechtecks beträgt 8. Das Rechteck hat demnach die Seitenlängen 1 und 3 oder es handelt sich bei dem zu umlaufenden Rechteck um ein Quadrat mit der Seitenlänge 2.

Wir bestimmen zunächst die Wahrscheinlichkeit, dass die Ameise ein Quadrat der Seitenlänge 2 umläuft. Dabei kann S entweder ein Eckpunkt des Quadrates (Fall 1) oder der Mittelpunkt einer Quadratseite (Fall 2) sein.

Fall 1: Ist S ein Eckpunkt des Quadrates, so führen nach der ersten Sekunde nur die zwei Wege $glglglg$ oder $grgrgrg$ zu einem Quadrat und zu S zurück. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten dieses Falls ergibt sich damit nach der Formel

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}=2\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^4\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{2^4}{5^7}\,.$$

Fall 2: Ist S der Mittelpunkt einer Quadratseite, so führen nach der ersten Sekunde nur die zwei Wege $lglglgl$ oder $rgrgrgr$ zu einem Quadrat und zu S zurück. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten dieses Falls ist somit

$$\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5}=2\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^4=\frac{2^5}{5^7}\,.$$

Die Ameise umläuft also mit der Wahrscheinlichkeit

$$\frac{2^4}{5^7}+\frac{2^5}{5^7}=\frac{48}{5^7}$$

ein Quadrat mit dem Umfang 8 und kehrt zu S zurück.

Umläuft die Ameise ein Rechteck mit den Seitenlängen 1 und 3, so kann S entweder ein Eckpunkt des Rechtecks (Fall 3) oder ein innerer Punkt einer Rechteckseite (Fall 4) sein.

Fall 3: Ist S ein Eckpunkt des Rechtecks, dann führen nach der ersten Sekunde nur die vier Wege $lggllgg$, $rggrrgg$, $gglggl$ oder $ggrrggr$ zu einem Rechteck und zurück zu S. Alle vier Wege enthalten vier Geradeaus-Entscheidungen g und drei Abbiege-Entscheidungen r bzw. l nach rechts bzw. links. Alle diese Wege werden also mit derselben Wahrscheinlichkeit durchlaufen. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des dritten Falles ist demnach

$$4\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^4\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{32}{5^7}\,.$$

Fall 4: Ist S ein innerer Punkt einer Rechteckseite, so liegt S auf der Rechteckseite mit der Seitenlänge 3. In diesem Fall führen nach der ersten Sekunde nur die Wege $gllggll$, $llggllg$, $grrggrr$ oder $rrggrrg$ zu einem Rechteck und zu S zurück. Diese vier Wege sind gleich wahrscheinlich, denn sie enthalten alle drei Geradeaus-Entscheidungen g und vier Abbiege-Entscheidungen r bzw. l nach rechts bzw. links. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des vierten Falles ist demnach

$$4\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^4=\frac{64}{5^7}\,.$$

Die Ameise umläuft somit ein Rechteck mit den Seitenlängen 1 und 3 mit der Wahrscheinlichkeit

$$\frac{32}{5^7}+\frac{64}{5^7}=\frac{96}{5^7}\,.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Ameise nach 8 Sekunden erstmals wieder im Ausgangspunkt S angekommen ist und dabei genau die Umfangslinie eines Rechtecks genau einmal abgelaufen hat, beträgt demnach

$$\frac{48}{5^7} + \frac{96}{5^7} = \frac{144}{5^7} = 0{,}0018432\,.$$

Unter allen Ameisenwegen der Länge 8 durchläuft also eine Ameise in knapp 0,2 % aller Fälle genau ein Rechteck der Länge 8 und kehrt zum Ausgangspunkt S zurück.

561023 Lösung *10 Punkte*

Sei $O(0,0)$ der Ursprung des Koordinatensystems.

Teil a) Für $a=1$ und $b=0$ gilt $f(x)=x^2+2\,x-3=(x-1)\cdot(x+3)$. Daher hat f die Nullstellen $x_1=-3$, $x_2=1$ und es gilt $f(0)=-3$. Das Dreieck wird somit von den Punkten $A(-3,0)$, $B(1,0)$ und $C(0,-3)$ aufgespannt. Es setzt sich aus den beiden rechtwinkligen Dreiecken AOC und BOC zusammen.

Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC kann aus der Grundseite $\overline{AB}$ und der Höhe $\overline{OC}$ auf diese Seite bestimmt werden. Die Längen der Seiten des Dreiecks ABC lassen sich mit dem Satz des Pythagoras bestimmen. Damit ergibt sich

$$F=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3=6 \quad \text{und} \quad u=4+3\sqrt{2}+\sqrt{10}\,.$$

Teil b) Für $a=6$ und $b=\sqrt{2}$ gilt $f(x)=x^2+12\,x-1$, die Nullstellen von $f(x)$ sind somit $x_1=-6-\sqrt{37}$, $x_2=-6+\sqrt{37}$, und das zu untersuchende Dreieck ABC wird von den Punkten $A\left(-6-\sqrt{37},0\right)$, $B\left(-6+\sqrt{37},0\right)$ und $C(0,-1)$ aufgespannt. Da AC bzw. BC nicht parallel zur y-Achse verlaufen, sind die Innenwinkel dieses Dreiecks bei A und B keine rechten Winkel. Für die Rechtwinkligkeit des Dreiecks ABC muss demnach gezeigt werden, dass der Innenwinkel bei C ein rechter Winkel ist.

Mit dem Satz des Pythagoras lassen sich die Seitenlängen $|AC|$ und $|BC|$ wie folgt berechnen.

$$|AC|^2=\left(-6-\sqrt{37}\right)^2+1^2=36+12\cdot\sqrt{37}+37+1=74+12\cdot\sqrt{37}$$

und

$$|BC|^2=\left(-6+\sqrt{37}\right)^2+1^2=36-12\cdot\sqrt{37}+37+1=74-12\cdot\sqrt{37}\,.$$

Damit ist $|AC|^2+|BC|^2=148$. Da ebenfalls $|AB|^2=\left(2\sqrt{37}\right)^2=4\cdot 37=148$ gilt, ist das Dreieck ABC nach der Umkehrung des Satzes des Pythagoras rechtwinklig bei C.

Lösungsvariante: $M(-6,0)$ ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ und hat von A und B den Abstand $\sqrt{37}$. Der Abstand von M zu C beträgt $\overline{MC}=\sqrt{36+1}=\sqrt{37}$. Damit liegt der Punkt C auf dem Halbkreis über der Strecke $\overline{AB}$ als Durchmesser und somit folgt die Behauptung aus der Umkehrung des Thalessatzes.

Teil c) Die Nullstellen x_1 und x_2 der Funktion $f(x)$ berechnen sich im allgemeinen Fall aus der Nullstellenformel für quadratische Gleichungen zu

$$x_{1,2}=-a\pm\sqrt{a^2+3-b^2}\,.$$

Da A und B zwei voneinander verschiedene Punkte sind, muss $a^2+3-b^2>0$ gelten. Der Punkt C liegt auf der y-Achse und hat die Koordinaten $C\left(0,b^2-3\right)$. Der Punkt C darf nicht auf der x-Achse liegen, denn sonst würde entweder A oder B mit C zusammenfallen. Demnach muss $b^2 \neq 3$ gelten und die beiden Nullstellen $x_{1,2}$ sind verschieden von null.

Folglich sind im Dreieck ABC die Winkel bei A und B keine rechten Winkel und das Dreieck ABC ist genau dann rechtwinklig, wenn $\overline{AB}$ die Hypotenuse ist.

Der Mittelpunkt von $\overline{AB}$ ist $M(-a, 0)$. Es gilt

$$|AM| = \sqrt{a^2 + 3 - b^2} \text{ und } |MC| = \sqrt{a^2 + (b^2 - 3)^2} = \sqrt{a^2 + b^4 - 6 \cdot b^2 + 9}\,.$$

Wenn das Dreieck ABC rechtwinklig bei C ist, dann muss C nach dem Thalessatz auf dem Thaleskreis über der Strecke $\overline{AB}$ als Durchmesser liegen, also $|MC| = |AM|$ und damit

$$\sqrt{a^2 + b^4 - 6 \cdot b^2 + 9} = \sqrt{a^2 + 3 - b^2}$$

gelten. Quadrieren liefert $a^2 + b^4 - 6 \cdot b^2 + 9 = a^2 + 3 - b^2$ und damit die biquadratische Bestimmungsgleichung

$$b^4 - 5 \cdot b^2 + 6 = \left(b^2 - 2\right) \cdot \left(b^2 - 3\right) = 0\,,$$

die nach der Lösungsformel für die quadratische Gleichung $z^2 - 5\,z + 6 = 0$ genau für $b_1^2 = 2$ oder $b_2^2 = 3$ erfüllt ist. Da schon festgestellt wurde, dass $b^2 \neq 3$ gelten muss, kommen somit für b nur die Zahlen $b_{11} = -\sqrt{2}$ und $b_{12} = \sqrt{2}$ in Frage.

Ist umgekehrt $b = \pm\sqrt{2}$ und a beliebig gewählt, so ist $a^2+3-b^2 = a^2+1 > 0$, die Schnittpunkte A und B der Kurve $y = f(x)$ mit der x-Achse existieren und es gilt $|MC| = |AM| = \sqrt{a^2 + 1}$. Das Dreieck ABC ist damit nach der Umkehrung des Thalessatzes in der Tat rechtwinklig bei C.

Lösung sind somit alle Paare (a, b) reeller Zahlen der Form $\left(a, \pm\sqrt{2}\right)$, a beliebig.

Lösungsvariante: Wir nehmen an, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist. Da C verschieden von A und B ist, ist $f(0) \neq 0$. Da AB die x-Achse ist und wegen $f(0) \neq 0$ weder A noch B auf der y-Achse liegen können, kann das Dreieck ABC nur bei C einen rechten Winkel haben. Damit ist der Koordinatenursprung O der Fußpunkt des Lots aus C auf die Gerade AB und liegt zwischen A und B. Das Lot hat die Länge $h = |CO| = |f(0)| = |3 - b^2|$ und die Strecken $\overline{AO}$ bzw. $\overline{BO}$ sind Hypotenusenabschnitte. Bezeichnet man mit x_1 und x_2 die Nullstellen von $f(x)$, so haben sie unterschiedliches Vorzeichen, da O zwischen den Nullstellen liegt. Nach dem Höhensatz muss $h^2 = |AO|\,|OB| = -x_1 x_2$ gelten. Setzt man die oben berechneten Werte für die Nullstellen x_1 und x_2 ein, ergibt sich

$$\begin{aligned}-x_1 \cdot x_2 &= -\left(-a - \sqrt{a^2 + 3 - b^2}\right) \cdot \left(-a + \sqrt{a^2 + 3 - b^2}\right)\\ &= -a^2 + (a^2 + 3 - b^2) = 3 - b^2\,.\end{aligned}$$

$h^2 = -x_1 x_2$ ist also äquivalent zu $|3 - b^2|^2 = 3 - b^2$ und wegen $b^2 - 3 \neq 0$ und $|3 - b^2|^2 = (3 - b^2)^2$ äquivalent zu $3 - b^2 = 1$, was zu $b^2 = 2$ führt. Dies liefert für b die Werte $-\sqrt{2}$ oder $\sqrt{2}$.

Wie oben zeigt man, dass alle Paare (a, b) der Form $\left(a, \pm\sqrt{2}\right)$ auch wirklich Lösung sind.

Teil a) Ja, es gibt positive rationale Zahlen a und b, für welche die Werte der linken und der rechten Seite der Ungleichung gleich sind, denn für $a = b = 1$ gilt $a + b = 2$ und man erhält:

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} = \frac{1}{1+1} + \frac{1}{1+1} = 1$$

sowie $$\frac{2}{3+a} + \frac{2}{3+b} = \frac{2}{3+1} + \frac{2}{3+1} = 1\,.$$

Beide Seiten der Ungleichung haben den Wert 1 und sind somit gleich.

Teil b) Bringt man jede der beiden Seiten der Ungleichung

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \geq \frac{2}{3+a} + \frac{2}{3+b} \tag{1}$$

auf einen gemeinsamen Nenner, ergibt sich

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} = \frac{1+b}{(1+a)(1+b)} + \frac{1+a}{(1+a)(1+b)} = \frac{2+a+b}{(1+a)(1+b)}$$

sowie

$$\frac{2}{3+a} + \frac{2}{3+b} = \frac{2\,(3+b)}{(3+a)(3+b)} + \frac{2\,(3+a)}{(3+a)(3+b)} = \frac{12+2\,(a+b)}{(3+a)(3+b)}\,.$$

Setzt man die Beziehung $a + b = 2$ jeweils im Zähler ein, erhält man die zu (1) äquivalente Ungleichung

$$\frac{4}{(1+a)(1+b)} \geq \frac{16}{(3+a)(3+b)}$$

und nach weiterer Division durch 4

$$\frac{1}{(1+a)(1+b)} \geq \frac{4}{(3+a)(3+b)}\,. \tag{2}$$

Da a und b positive Zahlen sind, sind auch die Zahlen $1 + a$, $1 + b$, $3 + a$ und $3 + b$ positiv. Multipliziert man (2) mit diesen Nennern, so ergibt sich

$$(3+a)(3+b) \geq 4\,(1+a)(1+b)$$

und nach Ausmultiplizieren schließlich die zu (2) äquivalente Ungleichung

$$9 + 3\,(a+b) + a\,b \geq 4 + 4\,(a+b) + 4\,a\,b\,. \tag{3}$$

Erneutes Einsetzen der Beziehung $a + b = 2$ ergibt

$$9 + 3 \cdot 2 + a\,b \geq 4 + 4 \cdot 2 + 4\,a\,b\,,$$

was sich zu $3 \geq 3\,a\,b$ und schließlich zur zu (1) äquivalenten Ungleichung

$$1 \geq a\,b \tag{4}$$

vereinfachen lässt. Nun gilt aber

$$1 - a\,b = 1 - (2-b)\,b = b^2 - 2\,b + 1 = (b-1)^2 \geq 0\,, \tag{5}$$

wenn $a + b = 2$ und damit $a = 2 - b$ erfüllt ist. (5) zeigt also, dass (4) und damit (1) für alle Paare (a, b) positiver rationaler (und sogar reeller) Zahlen mit $a + b = 2$ erfüllt ist.

Lösungsvariante: Da a und b positiv sind, sind auch die Zahlen $1+a$, $1+b$, $3+a$ und $3+b$ positiv. Bildet man die Differenz der beiden Seiten in (1) und multipliziert mit dem Hauptnenner $(3+a)\,(3+b)\,(1+a)\,(1+b)$, so ergibt sich die zu (1) äquivalente Ungleichung

$$(3+a)\,(3+b)\,(1+a+1+b) - 2\,(1+a)\,(1+b)\,(3+a+3+b) \geq 0\,. \tag{6}$$

Für die linke Seite L dieser Ungleichung ergibt sich nach Ausmultiplizieren

$$L = -a\,b^2 + b^2 - a^2\,b - 8\,a\,b + b + a^2 + a + 6\,.$$

Aus der Bedingung $a+b=2$ ergibt sich $b = 2-a$ und damit

$$L = 12\,a^2 - 24\,a + 12 = 12\,(a-1)^2\,.$$

Damit ist wieder (6) und damit auch (1) für alle Paare (a, b) positiver rationaler (und sogar reeller) Zahlen mit $a+b=2$ bewiesen.

Hinweis: Die Beschränkung auf rationale Zahlen wurde vorgenommen, da reelle Zahlen zum Anfang der Klasse 10 noch nicht überall im Schulunterricht eingeführt sind.

Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

Aufgabe 561021	*Insgesamt: 10 Punkte*
Teil a) Richtiges Angeben der drei Zahlen	1 Punkt
Teil b) Je richtigem Ergebnis 1 Punkt	2 Punkte
Teil c)	7 Punkte
Richtige Argumentation für Zeilen zwei und drei	1 Punkt
Für jede richtige Argumentation der Zeile vier, fünf, sechs und sieben	1 Punkt
Richtige Argumentation für die folgenden Zeilen	1 Punkt
Angabe des korrekten Ergebnisses	1 Punkt

Aufgabe 561022	*Insgesamt: 10 Punkte*
Teil a) Berechnung	1 Punkt
Teil b)	9 Punkte
Erkennen, dass zwei verschiedene Rechtecke möglich sind	1 Punkt
Erkennen, dass der Startpunkt ein Eckpunkt oder ein Punkt einer Seite sein kann	1 Punkt
Berechnung der Wahrscheinlichkeiten	7 Punkte

Aufgabe 561023	*Insgesamt: 10 Punkte*
Teil a)	3 Punkte
Bestimmen der erforderlichen Stücke im Dreieck	1 Punkt
Für jede Berechnung von Flächeninhalt und Umfang	1 Punkt
Teil b)	3 Punkte
Erkennen, dass der rechte Winkel bei C liegen muss	1 Punkt
Nachweis der Rechtwinkligkeit	2 Punkte
Teil c)	4 Punkte
Zielführender Lösungsansatz	2 Punkte
Lösung	2 Punkte

Aufgabe 561024 *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a) Richtiges Angeben der Zahlen und Nachweis der Gleichheit .... 3 Punkte

Teil b) Nachweis der Richtigkeit der Ungleichung .... 7 Punkte

Davon für zielführende Umformungen und Betrachtungen der Terme bis zu 4 Punkte.