56. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Olympiadeklasse 7
Lösungen

560721 Lösung *10 Punkte*

Da die Kinder ihre gezogenen Zettel nicht zurückgelegt haben, gilt:

(1) Jeder Zettel wurde genau einmal gezogen.

Emre nannte die Summe 4. Es gibt genau eine Möglichkeit, die Zahl 4 als Summe von zwei verschiedenen Zahlen von 1 bis 10 zu erhalten, nämlich nur $4 = 1 + 3$. Folglich gilt:

(2) Emre hat die Zettel mit den Zahlen 1 und 3 gezogen.

Duco nannte die Summe 7. Die Zahl 7 kann nur durch $1 + 6$, $2 + 5$ und $3 + 4$ als Summe von zwei verschiedenen Zahlen von 1 bis 10 erhalten werden. Wegen (1) und (2) entfallen $1 + 6$ und $3 + 4$. Es folgt:

(3) Duco hat die Zettel mit den Zahlen 2 und 5 gezogen.

Clivia nannte die Summe 11. Die Zahl 11 lässt sich nur durch $1 + 10$, $2 + 9$, $3 + 8$, $4 + 7$ und $5 + 6$ als Summe von zwei verschiedenen Zahlen von 1 bis 10 zerlegen. Wegen (1) und (2) entfallen $1 + 10$ und $3 + 8$ und wegen (1) und (3) entfallen $2 + 9$ und $5 + 6$. Es folgt:

(4) Clivia hat die Zettel mit den Zahlen 4 und 7 gezogen.

Barbie nannte die Summe 16. Die Zahl 16 lässt sich nur durch $6+10$ und $7+9$ als Summe von zwei verschiedenen Zahlen von 1 bis 10 zerlegen. Wegen (1) und (4) entfällt $7 + 9$. Es folgt:

(5) Barbie hat die Zettel mit den Zahlen 6 und 10 gezogen.

Aus (2), (3), (4) und (5) folgt: Die Zettel mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 und 10 sind bereits eindeutig Barbie, Clivia, Duco und Emre zugeordnet. Wegen (1) bleiben für Alvi nur die Zettel mit den Zahlen 8 und 9 übrig. Es folgt:

(6) Alvi hat die Zettel mit den Zahlen 8 und 9 gezogen.

(Tatsächlich gilt auch $8 + 9 = 17$ in Übereinstimmung mit der von Alvi genannten Summe.)

Das Ergebnis ist in (2) bis (6) festgehalten.

560722 Lösung *10 Punkte*

Wir bezeichnen mit x die Maßzahl des in Litern gemessenen Fassungsvermögens der Wanne. Aus (1) und (2) folgt dann: In den Eimer passen $\frac{5}{14} \cdot x$ Liter, in die Gießkanne $\frac{4}{21} \cdot x$ Liter.

Wegen

$$\frac{5}{14} \cdot x - \frac{4}{21} \cdot x = \frac{15}{42} \cdot x - \frac{8}{42} \cdot x = \frac{7}{42} \cdot x = \frac{1}{6} \cdot x$$

folgt daraus, dass in den Eimer insgesamt $\frac{1}{6} \cdot x$ Liter Wasser mehr hineinpasst als in die Gießkanne. Hieraus und aus (3) folgt $\frac{1}{6} \cdot x = 3{,}5$ und daher $x = 21$. Daraus lassen sich nun die einzelnen Fassungsvermögen der Gefäße ermitteln:

Die Wanne fasst 21 Liter Wasser, der Eimer ($\frac{5}{14} \cdot 21 =$) 7,5 Liter und die Gießkanne ($\frac{4}{21} \cdot 21 =$) 4 Liter.

560723 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Isolde kann neben Ariane wegen (1) und (5) weder Birte noch Gianna einladen. Daher kann sie mit Ariane nur höchstens sechs ihrer Freundinnen einladen.

Tatsächlich widerspricht die Einladung von Ariane, Caroline, Dorothee, Elisabeth, Fatima und Hilde keiner der Aussagen (1) bis (6).

Teil b) Wenn Isolde Birte einladen möchte, dann kann sie wegen (1) Ariane und wegen (4) Fatima nicht einladen.

Wir unterscheiden nun danach, ob sie Caroline einlädt:

Fall 1: Isolde lädt Caroline ein. Dann muss sie wegen (2) auch Dorothee einladen. Wegen (3) kann sie nicht Elisabeth einladen, da sie schon Birte und Caroline einlädt. Da sie Elisabeth und Fatima nicht einlädt, kann sie wegen (5) auch Gianna nicht einladen. Daher kann sie in diesem Fall höchstens Birte, Caroline, Dorothee und Hilde einladen. Tatsächlich widerspricht die Einladung von Birte, Caroline, Dorothee und Hilde keiner der Aussagen (1) bis (6).

Fall 2: Isolde lädt Caroline nicht ein. Dann darf sie wegen (2) auch Dorothee nicht einladen. Daher kann sie in diesem Fall höchstens Birte, Elisabeth, Gianna und Hilde einladen. Tatsächlich widerspricht die Einladung von Birte, Elisabeth, Gianna und Hilde keiner der Aussagen (1) bis (6).

Wenn Isolde neben Birte möglichst viele ihrer Freundinnen einladen möchte, dann kann sie nur entweder Birte, Caroline, Dorothee und Hilde oder Birte, Elisabeth, Gianna und Hilde einladen.

Teil c) Da Isolde genau fünf ihrer Freundinnen eingeladen hat und keine weitere ihrer acht Freundinnen einladen kann, kann sie weder Ariane noch Birte eingeladen haben: Wie in a) gezeigt, kann sie zusammen mit Ariane noch Caroline, Dorothee, Elisabeth, Fatima und Hilde, also insgesamt sechs Freundinnen einladen. Wie in b) gezeigt, kann sie zusammen mit Birte nur drei weitere Freundinnen einladen.

Da Isolde weder Ariane noch Birte eingeladen hat, kann sie wegen (6) auch Hilde nicht eingeladen haben. Daher muss sie Caroline, Dorothee, Elisabeth, Fatima und Gianna eingeladen haben.

Teil a) Wegen (2) ist das Dreieck ABG gleichschenklig mit der Basis $\overline{AB}$. Nach dem Basiswinkelsatz sind die Winkel GBA und BAG gleich groß. Wegen (3) und nach dem Nebenwinkelsatz und dem Innenwinkelsatz folgt $2 \cdot \beta + 90° = 180°$ und daher $\beta = 45°$.

Teil b) Wegen (3) und nach dem Nebenwinkelsatz hat das Dreieck ABG die Höhe $\overline{AG}$ zur Grundseite $\overline{BG}$. Nach der Flächeninhaltsformel und wegen (2) gilt für den Flächeninhalt A_{ABG} des Dreiecks ABG daher

$$\mathrm{A}_{ABG} = \frac{1}{2} \cdot |BG| \cdot |AG| = \frac{1}{2} \cdot 12\,\mathrm{cm} \cdot 12\,\mathrm{cm} = 72\,\mathrm{cm}^2 \,.$$

Wegen (1) und (4) gilt für den Flächeninhalt A_{ABC} des Dreiecks ABC die Gleichung

$$\mathrm{A}_{ABC} = 5 \cdot \frac{1}{4} \cdot \mathrm{A}_{ABG} \,,$$

woraus $\mathrm{A}_{ABC} = 90\,\mathrm{cm}^2$ folgt.

Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC ist also $90\,\mathrm{cm}^2$.

Teil c) Wegen (3) ist CGA ein rechter Winkel. Daher ist $\overline{AG}$ eine Höhe zur Grundseite $\overline{CG}$ des Dreiecks AGC. Nach der Flächeninhaltsformel gilt daher

$$\mathrm{A}_{AGC} = \frac{1}{2} \cdot |CG| \cdot |AG| \,.$$

Wegen (1) und (4) gilt $\mathrm{A}_{AGC} = \frac{1}{5} \cdot \mathrm{A}_{ABC} = \frac{1}{5} \cdot 90\,\mathrm{cm}^2 = 18\,\mathrm{cm}^2$. Wegen (2) folgt daher

$$|CG| = \frac{2 \cdot \mathrm{A}_{AGC}}{|AG|} = \frac{2 \cdot 18\,\mathrm{cm}^2}{12\,\mathrm{cm}} = 3\,\mathrm{cm} \,.$$

Die Strecke $\overline{CG}$ ist also 3 cm lang.

Teil d) Wegen (4) haben die Dreiecke DEF und BFE gleich große Flächeninhalte. Wegen (1) ist das Lot vom Punkt F auf die Gerade AB eine gemeinsame Höhe der Dreiecke DEF und BFE. Nach der Flächeninhaltsformel folgt aus gleich großen Flächeninhalten und gleichen Höhenlängen, dass die zugehörigen Grundseiten, also die Strecken $\overline{DE}$ und $\overline{BE}$, gleich lang sind.

Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

Aufgabe 560721	*Insgesamt: 10 Punkte*
Prinzipiell zum Ziel führendes Verfahren	2 Punkte
Korrekte Zuordnung der Zettel	5 Punkte
Begründungen der Zuordnungen	3 Punkte

Aufgabe 560722	*Insgesamt: 10 Punkte*
Geeigneter Lösungsansatz	2 Punkte
Begründungen und Rechnung	5 Punkte
Ergebnisse	3 Punkte

Aufgabe 560723	*Insgesamt: 10 Punkte*
Teil a)	3 Punkte
Teil b)	4 Punkte
Teil c)	3 Punkte

Aufgabe 560724	*Insgesamt: 10 Punkte*
Teil a)	2 Punkte
Teil b)	3 Punkte
Teil c)	3 Punkte
Teil d)	2 Punkte