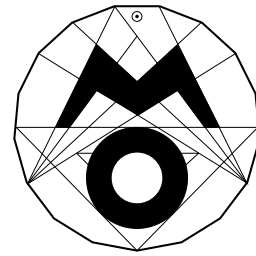


56. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionale)
Olympiadeklassen 11 und 12
Aufgaben



© 2016 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

561221

Man bestimme alle Lösungen des Gleichungssystems

$$a \cdot b + 1 = c, \tag{1}$$

$$a^2 + b^2 + 1 = 2c, \tag{2}$$

$$2a + b = c \tag{3}$$

mit ganzen Zahlen a, b, c .

561222

Gegeben sei eine Strecke \overline{PQ} der Länge d .

Die Strecken \overline{AC} der Länge $2a$ und \overline{BD} der Länge $2b$ sollen so angeordnet werden, dass P Mittelpunkt von \overline{AC} und Q Mittelpunkt von \overline{BD} ist. Außerdem sollen die Geraden AB und CD zueinander senkrecht sein.

Man untersuche, welche Bedingungen die Längen a, b und d erfüllen müssen, damit dies möglich ist.

561223

Eine Zahlenfolge x_1, x_2, x_3, \dots werde durch ihr Anfangsglied $x_1 = 1/6$ und danach schrittweise für $n = 1, 2, 3, \dots$ durch die Bildungsvorschrift

$$x_{n+1} = \frac{n+1}{n+3} \left(x_n + \frac{1}{2} \right)$$

bestimmt. Man ermittle x_{2016} .

561224

Für welche positiven ganzen Zahlen n gibt es eine Quadratzahl, deren letzte n Ziffern in der Dezimaldarstellung sämtlich gleich 4 sind?