

56. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Olympiadeklassen 9 und 10
Aufgaben



© 2016 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweise: 1. Für die Jahrgangsstufen 9 und 10 stehen in der ersten Runde insgesamt sechs Aufgaben zur Verfügung, aus denen die Verantwortlichen vor Ort eine geeignete Auswahl treffen können. Wenn die erste Runde als Hausaufgabenwettbewerb durchgeführt wird, kann die Wahl von vier der sechs Aufgaben auch den Teilnehmenden überlassen werden.

2. Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.

561011

In einem Wandergebiet gibt es vier Ausflugsziele A , B , C und D . Zwischen je zweien dieser Ausflugsziele verlaufen einige Wanderwege. Die Wanderwege kreuzen sich nicht. Eine *Wanderroute* beginnt an einem der Ausflugsziele und verläuft entlang der Wanderwege zu einem der anderen Ausflugsziele, wobei zwischendurch andere Ausflugsziele besucht werden können. Kein Ziel wird bei einer Wanderroute mehrfach angesteuert.

Es ist bekannt, dass es zwischen A und B genau 3 Wanderwege, zwischen B und C genau 2 Wanderwege, zwischen A und C genau 4 Wanderwege und zwischen A und D genau 5 Wanderwege gibt. Von B nach D gibt es genau 104 Wanderrouen, von D nach C genau 151 Wanderrouen.

Wie viele Wanderrouen gibt es von A nach C ?

561012

Beweisen Sie, dass sich ein gleichseitiges Dreieck stets restlos so in vier Teildreiecke zerlegen lässt, dass drei der vier Teildreiecke rechtwinklig sind und ein Teildreieck gleichseitig ist.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

561013

In der Gleichung

$$***** - ***** = 2017$$

ist jeder Stern so durch eine der Ziffern $0, 1, 2, \dots, 9$ zu ersetzen, dass die Gleichung stimmt. Keine zwei Sterne dürfen durch die gleiche Ziffer ersetzt werden. Die Ziffer Null darf nicht an erster Stelle einer Zahl stehen.

- a) Bestimmen Sie alle Möglichkeiten, dies zu tun. Weisen Sie nach, dass es keine weiteren Möglichkeiten gibt.
- b) Beweisen Sie, dass es keine Lösung gibt, wenn man 2017 durch 2016 ersetzt.

561014

Tabea möchte auf möglichst einfache Weise herausbekommen, ob eine vorgegebene positive ganze Zahl n genau 6 positive Teiler hat.

- a) Geben Sie – ohne Begründung – alle positiven ganzen Zahlen kleiner als 60 an, die genau 6 positive Teiler haben.
- b) Tabea hat ein Verfahren gefunden, anhand der Primfaktorzerlegung von n herauszufinden, ob n genau 6 positive Teiler hat. Beschreiben Sie ein solches Verfahren und beweisen Sie dessen Korrektheit.

561015

Wir betrachten die Funktion $f(x) = x \cdot |x| - 2x$.

- a) Zeichnen Sie den Graph der Funktion f in einem rechtwinkligen Koordinatensystem.
- b) Bestimmen Sie durch Argumentieren anhand des Graphen dieser Funktion f diejenigen reellen Zahlen s , für welche die Gleichung $x \cdot |x| - 2x = s$ genau zwei verschiedene Lösungen für x hat.

Hinweis: Das Ablesen von Werten aus der Zeichnung führt höchstens zu einer Vermutung, deren Korrektheit dann aber noch begründet werden muss.

561016

Gegeben ist ein Rechteck $ABCD$ mit den Seitenlängen $|AB| = 12$ und $|BC| = 6$.

Der Mittelpunkt von \overline{AB} wird mit M und der Mittelpunkt von \overline{BC} mit N bezeichnet. Auf der Strecke \overline{NC} wird ein beliebiger Punkt P gewählt. Der Schnittpunkt von PM mit der Parallelen zur Geraden AB durch N wird mit Q bezeichnet. R sei nun der Bildpunkt von P bei der Spiegelung an Q . Die Punkte U und V sollen die Lotfußpunkte von R auf AD beziehungsweise auf CD sein.

Welche Werte für den Flächeninhalt des Rechtecks $URVD$ sind möglich?

Hinweis: Eine Vermutung, welche Werte möglich sind, kann man sich zum Beispiel mit Hilfe des Computerprogramms *geogebra* erarbeiten. Mit Hilfe dieses Programms, das im Internet frei erhältlich ist, kann man geometrische Zeichnungen erstellen und u. a. einen Punkt an einem anderen Punkt spiegeln sowie den Flächeninhalt von konstruierten Vielecken bestimmen. Die eigentliche Aufgabe besteht dann aber darin, die Korrektheit der wie auch immer gewonnenen richtigen Vermutung logisch zu begründen.