55. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklasse 11
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

551144

Man bestimme alle positiven ganzen Zahlen m, n mit $m \leq 2n$, die die Gleichung

$$m \cdot \binom{2n}{n} = \binom{m^2}{2}$$

erfüllen.

Hinweis: Für positive ganze Zahlen n, k ist der *Binomialkoeffizient* $\binom{n}{k}$ definiert als

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \ldots (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \ldots 1}\,.$$

551145

Die Punkte A, B, C, D liegen in dieser Reihenfolge auf einem Kreis mit dem Radius r. Es gelte $|AB| = |BC| = |CD| = s$ und $|AD| = s + r$.

Man ermittle alle möglichen Größen der Innenwinkel des Vierecks $ABCD$.

551146

Gegeben sei der Ausdruck

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_3x_4x_5 + x_4x_5x_6 + x_5x_6x_7 + x_6x_7x_1 + x_7x_1x_2$$

für nichtnegative reelle Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_7$ mit Summe 1. Man zeige, dass $f(x_1, x_2, \ldots, x_7)$ einen maximalen Wert annimmt, und bestimme diesen.