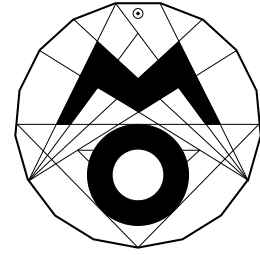


55. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklasse 10
Aufgaben – 1. Tag



© 2016 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

551041

Jan fährt mit dem Auto von Stuttgart über Nürnberg nach Leipzig. Auf der Strecke bis Nürnberg fährt er im Schnitt 75 km/h, von Nürnberg bis Leipzig fährt er durchschnittlich 145 km/h. Insgesamt braucht er für den Weg 4 Stunden 48 Minuten.

Am nächsten Tag fährt er dieselbe Strecke zurück, und zwar mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 100 km/h. Von Nürnberg nach Stuttgart fährt er im Schnitt 70 km/h, und für die Strecke von Leipzig bis Nürnberg braucht er 2 Stunden.

Zeigen Sie, dass sich aus diesen Angaben eindeutig ermitteln lässt, wie lang die Teilstrecken Stuttgart–Nürnberg und Nürnberg–Leipzig sind, und ermitteln Sie diese Längen.

551042

Für jeden Punkt P der Fläche eines Dreiecks ABC sei D der Punkt auf der Strecke \overline{BC} , für den PD parallel zu AB ist, E sei der Punkt auf der Strecke \overline{CA} , für den PE parallel zu BC ist, und F sei der Punkt auf der Strecke \overline{AB} , für den PF parallel zu CA ist. Liegt der Punkt P auf dem Rand des Dreiecks ABC , so entartet mindestens eine der Strecken \overline{PD} , \overline{PE} oder \overline{PF} zu einem Punkt (und die entsprechende Streckenlänge wird null).

Gesucht wird der geometrische Ort (d. h. die Menge) aller Punkte P , für die

$$|PD| + |PE| + |PF| = \frac{1}{3} (|AB| + |BC| + |CA|)$$

gilt.

- a) Bestimmen Sie den geometrischen Ort für den Fall, dass das Dreieck ABC gleichseitig ist.
- b) Beweisen Sie die folgende Aussage:
Ist das Dreieck ABC nicht gleichseitig, so ist der geometrische Ort eine Strecke durch den Schwerpunkt des Dreiecks ABC .

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

551043

Bei einer Lottoziehung sind Spielscheine mit den Zahlen $1, 2, \dots, 49$ im Einsatz, von denen genau sechs anzukreuzen sind. Bei der Lottoziehung werden dann sieben dieser 49 Zahlen gezogen. Wenn auf einem Lottoschein mindestens drei der angekreuzten Zahlen zu den sieben gezogenen Zahlen gehören, hat der Lottospieler einen *Dreier* gewonnen.

Paul möchte Lotto spielen und auf jeden Fall einen Dreier gewinnen. Dazu füllt er n Lottoscheine aus; auf jedem Lottoschein kreuzt er genau sechs der vorgedruckten Zahlen an.

Bestimmen Sie ein möglichst kleines n , für das Paul so spielen kann, dass er garantiert einen Dreier auf einem seiner Lottoscheine hat.

Hinweis zur Bearbeitung: Ihre Lösung sollte mit der Angabe genau eines Wertes n beginnen, gefolgt von genau einem Beweis, dass dieses n die Bedingung der Aufgabenstellung erfüllt. Ein Nachweis, dass das von Ihnen gewählte n minimal ist, wird *nicht* verlangt.

Die Punktbewertung Ihrer Lösung hängt allerdings (neben der Richtigkeit und Vollständigkeit Ihres Beweises) sowohl davon ab, wie klein der von Ihnen angegebene Wert n ist, als auch davon, für welche Werte n andere Teilnehmer Lösungen erbracht haben. Je kleiner der von Ihnen angegebene Wert n ist, desto höher sind Ihre Chancen auf eine hohe Punktzahl.