**55. Mathematik-Olympiade**
**4. Stufe (Bundesrunde)**
**Olympiadeklasse 9**
**Aufgaben – 2. Tag**



Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

550944

In einem spitzwinkligen Dreieck $ABC$ seien die Strecken $\overline{AD}$ und $\overline{CF}$ die beiden von $A$ bzw. $C$ ausgehenden Höhen, deren Fußpunkte auf den jeweils gegenüberliegenden Seiten mit $D$ bzw. $F$ bezeichnet wurden. Der Schnittpunkt dieser Höhen $\overline{AD}$ und $\overline{CF}$ werde mit $S$ bezeichnet.

a) Weisen Sie nach, dass $|\sphericalangle ASF| = |\sphericalangle CBA|$ gilt.

b) Berechnen Sie die Größe $\alpha$ des Winkels $BAC$ für den Fall, dass zusätzlich $|AS| = |BC|$ gilt.

550945

Zeigen Sie, dass die Gleichung $x^2 - \lfloor x^2 \rfloor = (x - \lfloor x \rfloor)^2$ im Intervall $1 < x < 8$ genau 55 Lösungen hat.

Dabei bezeichnet $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl $z$ mit der Eigenschaft $z \leq x$.

550946

Sultan Abu Kara verordnet seinem Reich eine Währungsreform. Es sollen in Zukunft nur noch Münzsorten im Wert von $a$ Dukaten geprägt werden, wobei $a$ alle positiven Teiler einer vorgegebenen ganzen Zahl $n > 1$ durchläuft, Münzen im Wert von 1 Dukaten und $n$ Dukaten eingeschlossen. Um lästige Wechselgeldprobleme zu vermeiden, soll dabei allerdings die folgende *Kleingeldregel* zusätzlich berücksichtigt werden:

> Aus jeder Geldbörse mit Münzen im Gesamtwert von $n - 1$ Dukaten soll jeder (ganzzahlige) Betrag von $k$ Dukaten, $1 \leq k \leq n - 1$, ohne weiteres Wechselgeld ausgezahlt werden können.

*Auf der nächsten Seite geht es weiter!*

Zeigen Sie:

a) Die Kleingeldregel ist für $n = 6$ nicht erfüllt, gilt aber für $n = 16$.

b) Hat $n > 1$ genau einen Primteiler, so ist die Kleingeldregel erfüllt.

c) Hat $n > 1$ mehr als einen Primteiler, so ist die Kleingeldregel nicht erfüllt.

*Hinweis:* Als *Primteiler* einer ganzen Zahl $n > 1$ bezeichnet man eine positive ganze Zahl $p$, die eine Primzahl sowie ein Teiler von $n$ ist. Eine *Primzahl* ist eine ganze Zahl $p > 1$, die genau zwei positive ganze Teiler besitzt, nämlich 1 und $p$.