54. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklassen 11 und 12
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

541234

Es sei eine positive ganze Zahl $n \geq 2$ vorgegeben. In Abhängigkeit von n werden nun auf der Zahlengeraden bestimmte rationale Zahlen markiert, und zwar genau diejenigen, die sich als Bruch $\frac{a}{b}$ mit einer ganzen Zahl a und einer positiven ganzen Zahl b kleiner oder gleich n darstellen lassen. Insbesondere werden also alle ganzen Zahlen markiert.

a) Man bestimme den größten Abstand M zweier benachbarter markierter Zahlen.

b) Man bestimme den kleinsten Abstand m zweier benachbarter markierter Zahlen.

541235

Gegeben sei eine Strecke $\overline{AB}$ und eine dazu senkrechte Gerade g, die $\overline{AB}$ im Inneren schneidet. Man bestimme diejenigen Punkte X auf g, für die der Unterschied $|\alpha - \beta|$ der Winkel $\alpha = |\sphericalangle BAX|$ und $\beta = |\sphericalangle XBA|$ maximal wird.

541236

Man beweise: Sind x, y, z nichtnegative reelle Zahlen mit $x + y + z = 1$, so gilt

$$\sqrt[3]{x - x^3} + \sqrt[3]{y - y^3} + \sqrt[3]{z - z^3} \leq 2\,.$$