

54. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklasse 10
Aufgaben – 2. Tag



© 2014 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

541034

Gegeben sei ein Rechteck $ABCD$ mit den Seitenlängen $|AB| = 12$ und $|BC| = 9$. Ein Kreis k heißt *innerer Berührungskreis* des Rechtecks, wenn sein Inneres ganz im Inneren des Rechtecks liegt und der Kreis mit mindestens einer Seite des Rechtecks genau einen gemeinsamen Punkt besitzt. Ein Kreis k heißt *äußerer Berührungskreis* des Rechtecks, wenn sein Inneres ganz außerhalb des Rechtecks liegt und der Kreis mit einer Ecke oder Seite des Rechtecks genau einen gemeinsamen Punkt besitzt.

- Wir betrachten alle möglichen inneren Berührungskreise des Rechtecks mit den Radien $2 \leq r \leq 3$. Die Mittelpunkte all dieser inneren Berührungskreise bilden eine Fläche innerhalb des Rechtecks.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.
- Die Mittelpunkte aller äußeren Berührungskreise mit den Radien $2 \leq r \leq 3$ bilden eine Fläche außerhalb des Rechtecks.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

541035

Man bestimme die Menge aller reellen Zahlen x , für welche die Gleichung

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-4} = 2$$

erfüllt ist.

Hinweis: Damit die Gleichung gelten kann, müssen insbesondere alle Wurzeln definiert sein.

541036

Die Ecken eines Würfels sollen mit verschiedenen natürlichen Zahlen derart beschriftet werden, dass zwei dieser Zahlen genau dann teilerfremd sind, wenn die zugehörigen Ecken Eckpunkte der gleichen Würfelkante sind.

- Finden Sie eine derartige Beschriftung und weisen Sie nach, dass die angegebene Beschriftung die geforderte Eigenschaft hat.
- Wie klein kann die größte dieser Zahlen gewählt werden?