**53. Mathematik-Olympiade**
**4. Stufe (Bundesrunde)**
**Olympiadeklasse 10**
**Aufgaben – 1. Tag**



Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

531041

Doppelkopf ist ein Spiel für vier Spieler. Zwei Varianten dieses Spiels sind im Gebrauch.

In jeder der beiden Varianten werden Spielkarten verwendet, die sich durch ihre *Farbe* (etwa Eichel) und ihre *Höhe* (etwa König) unterscheiden. Es sind die Farben Eichel, Grün, Rot und Schellen sowie die Höhen As, Zehn, König, Ober, Unter und Neun in Gebrauch, wobei jede Spielkarte (also etwa „Rot Ober") doppelt vorhanden ist (daher auch der Name *Doppelkopf*). Alle Unter, Ober sowie die beiden Karten „Rot Zehn" werden als *Trumpfkarten* bezeichnet, da ihnen im Spiel eine besondere Rolle zukommt. Alle anderen Karten werden als *Farbkarten* bezeichnet, wobei meistens die Farbkarten der Farbe Schellen auch Trumpf sind. Die Karten werden anfangs vollständig und zu gleicher Anzahl unter den Spielern verteilt, dann kann das Spiel beginnen.

In der *ersten Variante* wird ohne Neunen, also mit 40 Karten gespielt. Jeder Spieler erhält in dieser Variante folglich 10 Karten und es gibt genau vier Farbkarten Rot (zwei Asse und zwei Könige).

In der *zweiten Variante* wird mit Neunen, also mit 48 Karten gespielt. Jeder Spieler erhält in dieser Variante folglich 12 Karten und es gibt genau acht Farbkarten Grün (zwei Asse, zwei Zehnen, zwei Könige und zwei Neunen).

Man vergleiche die Wahrscheinlichkeit, dass beim Spiel mit Neunen die acht grünen Farbkarten unter den Spielern gleich verteilt sind (jeder Spieler hat zwei grüne Farbkarten), mit der Wahrscheinlichkeit, dass beim Spiel ohne Neunen die vier roten Farbkarten gleich verteilt sind (jeder Spieler hat eine rote Farbkarte).

531042

Für eine ganze Zahl $n > 0$ mit der Dezimaldarstellung $n = [z_1 z_2 \dots z_r]$ mit $r > 0$ und $z_1 > 0$ sei $P(n) = z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_r$ das Querprodukt dieser Zahl, $Q(n) = z_1 + z_2 + \dots + z_r$ ihre Quersumme und $R(n) = n + P(n) \cdot Q(n)$.

Zu jeder ganzen Zahl $n > 0$ definieren wir die Folge $a_0, a_1, \dots$ durch die Bildungsvorschrift $a_0 = n$, $a_{i+1} = R(a_i)$ für $i \geq 0$.

Zeigen Sie, dass für jeden Startwert $n$ eine positive ganze Zahl $k_n$ so existiert, dass $a_j = a_{k_n}$ für alle $j \geq k_n$ gilt.

*Auf der nächsten Seite geht es weiter!*

531043

Für ein konvexes Viereck $ABCD$ seien die Mittelpunkte der Seiten $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ mit $M$ bzw. $N$ bezeichnet. Weiter bezeichne $S$ den Schnittpunkt der Geraden $AN$ und $BM$ und $T$ den Schnittpunkt der Geraden $DN$ und $CM$.

Zeigen Sie: Gilt $|\sphericalangle BMC| = |\sphericalangle DNA| = 90°$, so sind die drei Geraden $AD$, $BC$ und $ST$ entweder paarweise parallel oder die Geraden $AD$ und $BC$ werden von der Geraden $ST$ unter Winkeln gleicher Größe geschnitten.

*Hinweis:* Ein Viereck heißt konvex, wenn nicht benachbarte Seiten keinen gemeinsamen Punkt haben und alle Innenwinkel kleiner als 180° sind.