

53. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklasse 8
Aufgaben – 1. Tag



© 2014 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.

530841

Der berühmte italienische Physiker, Astronom und Mathematiker Galileo Galilei (1564–1642) hat die folgende bemerkenswerte, unendlich lange Gleichungskette entdeckt:

$$\frac{1}{3} = \frac{1+3}{5+7} = \frac{1+3+5}{7+9+11} = \frac{1+3+5+7}{9+11+13+15} = \dots$$

Beweise die Korrektheit dieser Gleichungskette.

530842

Eine Zahl sei unglücklich genannt, wenn sie eine positive ganze Zahl ist, die gleich dem Dreizehnfachen ihrer Quersumme ist.

- Beweise, dass es keine zweistelligen unglücklichen Zahlen gibt.
- Ermittle alle dreistelligen unglücklichen Zahlen.
- Untersuche, ob es unglückliche Zahlen gibt, welche mehr als 3, aber weniger als 20 Stellen haben.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

530843

Gegeben sind zwei positive Streckenlängen r und h . Betrachtet werden Dreiecke, von denen jedes die folgenden Eigenschaften besitzt:

- (1) Das Dreieck ist gleichschenkelig.
 - (2) Die Höhe des Dreiecks auf die Basis hat die Länge h .
 - (3) Der Radius des Inkreises des Dreiecks hat die Länge r .
- a) Beweise: Je zwei Dreiecke mit den Eigenschaften (1), (2) und (3) sind kongruent zueinander.
 - b) Ein Dreieck mit den Eigenschaften (1), (2) und (3) soll mit Zirkel und Lineal konstruiert werden.
Gib eine Konstruktionsbeschreibung dafür an.
 - c) Beweise: Wenn ein Dreieck nach deiner in Teilaufgabe b) angegebenen Beschreibung konstruiert wird, dann hat es tatsächlich die Eigenschaften (1), (2) und (3).
 - d) Beweise: Wenn die Bedingung $2r < h$ erfüllt ist, dann ist die von dir in Teilaufgabe b) beschriebene Konstruktion durchführbar.