53. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklassen 11 und 12
Aufgaben – 1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

531231

Es seien m und n teilerfremde positive ganze Zahlen. Man beweise, dass es dann stets zwei Mengen M und N von m bzw. n aufeinanderfolgenden positiven ganzen Zahlen gibt, deren Elemente die gleiche Summe haben.

Beispielsweise gilt für $m = 2$ und $n = 3$ mit $M = \{4, 5\}$ und $N = \{2, 3, 4\}$

$$4 + 5 = 2 + 3 + 4\,.$$

531232

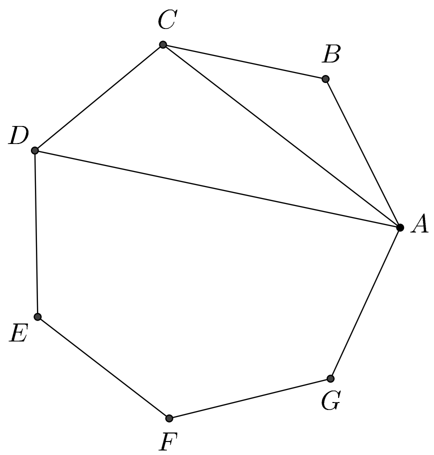
Die positive ganze Zahl A sei ein Vielfaches von 99. Man zeige, dass die Quersumme von A mindestens 18 beträgt.

531233

Gegeben ist ein regelmäßiges Siebeneck $ABCDEFG$ mit der Seitenlänge 1 (siehe Abbildung A 531233). Man beweise, dass für die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{AD}$

$$\frac{1}{|AC|} + \frac{1}{|AD|} = 1$$

gilt.



A 531233